TR-0758

E単一化子の完全集合を求める推論規則

大須賀 昭彦（東芝）、坂井 公（筑波大）

April, 1992

ICOT

Mita Kokusai Bldg. 21F
4-28 Mita 1-Chome
Minato-ku Tokyo 108 Japan

(03)3456-3191～5
Telex ICOT J32964

Institute for New Generation Computer Technology

E単一化子の完全集合を求める推論規則

大須賀 昭彦　坂井 公

等式理論を法として単一化を行う拡張単一化のことをE単一化という．本稿では，E単一化を行う半決定手続きを与える．この手続きは，任意の等式理論に対して完全である．完全性の証明には証明順序法を用いる．また手続きは，Knuth-Bendix完備化手続きの拡張になっているので，E単一化の過程で等式理論に対応する完備な項書換え系を獲得することもある．この場合，本稿はHullotの結果の一般化でもある．

1 はじめに

単一化(unification)[3]とは，2つの項を構文的に一致させる代入を求めることである．論理型言語などのプログラミング言語や，定理の自動証明，証明チェッカなどのシステムの実現，もしくは自然言語処理などの人工知能の研究において単一化の果たす役割は本質的であるが，これらの研究が進むにつれ，単一化に求められる機能も高度かつ多様になってきている．拡張単一化(extended unification)は，こういった要求に応えるため，項の構文的一致だけでなく，何らかの解釈のもとで2項を等しくする代入を求めるように単一化を拡張したものである．本稿においては，拡張単一化の一つとして，一階の等式理論Eを法(modulo)に単一化を行うE単一化を考える．これは，理論的に単一化の自然な拡張になっているだけでなく，論理型と関数型言語の融合[4]，論理型言語への等式制約の導入[26]，等号付一階述語論理の証明システムの実現などへ応用可能な拡張といえる．

E単一化においては，獲得すべき代入のことをE単一化子と呼ぶ．通常の単一化と異なり，E単一化においては最汎単一化子が存在するとは限らない．そこで，次のような集合について考える．τ, νを項，Eを等号系，つまり等式の集合とする．τとνのE単一化子の完全集合とは，τとνのE単一化子の集合で，τとνの任意のE単一化子について(Eを法として)より汎用な代入を含むものをいう．つまり，任意のE単一化子を代表するような集合である．完全集合から冗長な代入を取り除いたものを極小完全集合という．極小完全集合は，必ずしも存在すると限らないし，存在しても有限とは限らない[14][24]．また，E単一化可能性は決定不能である．これらのことから，完全集合の要素すべてを求めて停止するような手続きも，任意の2項についてE単一化可能か否かを判定する手続きも実現できないことがわかる．そこでE単一化を行う手続きは，Eを等号系，τ, νをE単一化可能な2項とするとき，τとνの任意のE単一化子θについて，Eを法としてθより汎用なE単一化子を有限ステップで獲得するなら完全(complete)であると定義される．

E単一化は最初にPlotkinによって定式化され[20]，その後，特定の等式理論を対象としたE単一化が多く研究された．たとえば，結合・交換(associative commutative)律を法とする単一化として[7]などがあり，結合・ベキ等(idempotence)律について[1]，またこれらに分配(distributivity)律を加えた組合せについて考察したものに[16]などがある．一般の等式理論が扱え，かつ完全なものとして，パラモジュレーション(par-

Inference Rules for a Complete Set of E-unifiers.
Akihiko Ohsuga, 東芝 システム・ソフトウェア技術研究所.
Kō Sakai, 新世代コンピュータ技術開発機構.
コンピュータソフトウェア, Vol. 8, No. 3 (1991), pp. 33-54.
[論文] 1989年12月26日受付.

amodulation)をあげることができるが，効率のよい方法とはいえない．また，ナローイング(narrowing)[8]や基底ナローイング(basic narrowing)[13][25]を用いたE単一化があるが，これらは等式理論に対応する完備な(すなわち，合流的かつ停止的な)項書換え系(term rewriting system)[9][11]の存在を前提としている．Knuth-Bendix の完備化手続き(Knuth-Bendix completion procedure)[15][22]を用いれば，等式理論から完備な項書換え系を求めることが可能である．しかし，この手続きは必ずしも停止しないし，失敗に終わることもあるなどの問題を持つ．Gallier と Snyder が完備な項書換え系の存在を前提とせず，任意の等式理論のもとでE単一化を行う完全な手続きを提案しているが[10]，効率的とはいいがたく，完全性の証明も不透明である．

本稿で提案する手続きは，完備化手続きとナローイングの融合に基づくものである．Eを等号系，τ, νをE単一化すべき2つの項とすると，手続きはEに対応する完備な項書換え系Rを構成しながら，それと並行してτとνにナローイングを施す．このときRに求められる停止性条件を弱めることで，手続きが失敗に終わる場合を防ぐ．すると，失敗しない完備化はたとえ停止しなくても等式の半決定手続きとして完全なので[12]，τとνがE単一化可能ならば必ずそのE単一化子を求めることができる．これは，等号付一階述語論理などにおける反駁型定理証明で用いられる手法に倣ったものである．また，手続きは完備化手続きを含むものとなっているため，E単一化の過程で完備なRを獲得することもある．いったん完備なRが獲得されると，以降は従来のナローイングによるE単一化と同等になるので，手続きはナローイングの一般化として捉えることもできる．手続きの完全性は証明順序法(proof ordering method)[2][23]によって示す．これは，手続きを推論規則によって表現し，E単一化をその規則の適用と捉える手法である．

本稿では，第2節において基本的な記法や用語を導入した後，第3節でE単一化と等式証明を関連づけ，ナローイングによるE単一化が完全になる条件を考察する．提案するE単一化の手続きを第4節において推論規則の形で与え，第5節でその完全性を証明する．第6節では推論規則の効率化について考察する．第7節においていくつかの例を示し，最後に第8節で実現について述べる．

2 準　備

本節においては，基本的な用語と記法を導入する．ただし，述語論理の標準的な記法や用語については既知であると仮定する．

まず，対象とする言語を定める．$\mathcal{F}$を**関数記号**(function symbol)の有限集合，$\mathcal{V}$を**変数**(variable)の可算無限集合とする．$\mathcal{F}$の要素はf, g, hなどの英小文字もしくは$+$, $-$などの特殊記号で記述し，$\mathcal{V}$の要素はX, Y, Zなどの英大文字で記述する．$\mathcal{F}$の各関数記号には**階数**(arity, rank)と呼ばれる自然数が与えられており，$\alpha(f)$によってfの階数を表すことにする．$\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$上の(一階の)**項**(term)は以下の規則によって構成される．

(1) $\mathcal{V}$の変数は項である．

(2) $\mathcal{F}$の関数記号で階数0のものは項である．このような項を特に**定数**(constant)という．

(3) fを$\mathcal{F}$の関数記号で階数$\alpha(f)$が1以上のもの，$\tau_1 \cdots \tau_{\alpha(f)}$を項とすると，$f(\tau_1, \cdots, \tau_{\alpha(f)})$は項である．

$\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$をこのように構成される$\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$上のすべての項の集合とする．$\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$の元，つまり項を$\sigma$, τ, νなどのギリシャ小文字で記述し，$\mathcal{V}(\tau)$をτに出現するすべての変数の集合とする．$\mathcal{V}(\tau)=\phi$なるτ，すなわち変数を含まない項を**基礎項**(groundterm)と呼び，$\mathcal{T}(\mathcal{F})$によって T(F, V)におけるすべての基礎項の集合を表す．本稿においては T(F)$\neq\phi$ を仮定する．つまり，F には常に少なくとも1つの定数が存在するものとする．項の中に部分的に現れる項を**部分項**(subterm)と呼ぶ．部分項としてσを持つ項を$\tau[\sigma]$と書き，$\tau[\sigma]$の部分項σをνへ置き換えた項を$\tau[\nu]$によって表すことになる．

例1　$\mathcal{F}=\{a, b, f, g\}$, $\mathcal{V}=\{X, Y, \cdots\}$, $\alpha(a)=0$, $\alpha(b)=0$, $\alpha(f)=2$, $\alpha(g)=1$とする．このとき，X, a, $g(b)$, $f(g(Y), b)$などはいずれも項である．また，$\mathcal{F}=\{+, -, 0\}$, $\mathcal{V}=\{X, Y, \cdots\}$, $\alpha(+)=2$, $\alpha(-)=1$, $\alpha(0)=0$とすると，$X+Y$, -0なども項である[†1]．この中で，a,

†1　ここでは$+(X, Y)$, $-(0)$などの本来の記法の代わりに，$X+Y$などの中置記法(infix notation)や-0などの前置記法(prefix notation)を一般の慣習にしたがって断りなく用いる．

$g(b)$, -0 が基礎項である．項 $f(g(Y), b)$については $g(Y)$, Y, b と $f(g(Y), b)$自身が部分項となる．$\tau = f(g(Y), b)$, $\sigma = g(Y)$とすると $\tau[\sigma]$であり，$\upsilon = a$ とすると $\tau[\upsilon] = f(a, b)$である．□

$\mathcal{V}$ から $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$への関数を**代入**(substitution)という．通常我々が用いる代入は，$\mathcal{V}$ における有限個の変数のみの値を変化させ，他の変数については値を保存するものである．そこで，このような代入 θ を，$\theta = \{\tau_1/X_1, \cdots, \tau_n/X_n\}$ なる記法で表すことにする．これは，以下のように解釈する．

$$\theta(X) \quad \begin{cases} \tau_i & X \text{ が } X_i (1 \leq i \leq n) \text{のとき} \\ X & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

θ によって値の変化する変数の集合を代入 θ の定義域といい，定義域が空のもの，つまり恒等代入は ϕ で表すことにする．また，代入 θ と変数の有限集合 V について θ の定義域を V に限ったもの，つまり $\{\tau/X | \tau/X \in \theta$ かつ $X \in V\}$ で表現される代入を $\theta|_V$ によって表す．代入 θ は，以下のようにして $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$から $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$への関数 $\bar{\theta}$ へ拡張できる．

$$\bar{\theta}(\tau) = \begin{cases} \theta(X) & \tau \text{ が } X \text{ のとき} \\ c & \tau \text{ が } c \text{ のとき} \\ f(\bar{\theta}(\tau_1), \cdots, \bar{\theta}(\tau_{\alpha(f)})) & \tau \text{ が } f(\tau_1, \cdots, \tau_{\alpha(f)}) \\ & \quad \text{のとき} \end{cases}$$

以降，$\bar{\theta}(\tau)$を単に $\tau\theta$ で表す．$\equiv$ によって2つの項の構文的な一致を表すと，2項 τ, υ について $\tau \equiv \upsilon\theta$ なる代入 θ が存在するとき，τ を υ の**具体例**(instance)という．

例2 τ を $f(X, Y)$, θ を $\{g(Z)/X, b/Y\}$ とすると，$\tau\theta$ は $\bar{\theta}(f(X, Y)) = f(\bar{\theta}(X), \bar{\theta}(Y))$より $f(g(Z), b)$となる．$V = \{X\}$ とすると，$\theta|_V = \{g(Z)/X\}$ となる．いうまでもなく，$\tau\theta$ は τ の具体例である．□

代入 θ_1, θ_2 に対して $\theta_1 \circ \theta_1' = \theta_2$ なる代入 θ_1' が存在するとき，$\theta_1 \preceq \theta_2$ と定義する．ここで，$\theta_1 \circ \theta_1'$ は代入の合成を表す．つまり，$\tau(\theta \circ \theta')$は$(\tau\theta)\theta'$ のことである．2つの項 τ, υ について $\tau\theta \equiv \upsilon\theta$ となるとき，θ を τ と υ の**単一化子**(unifier)と呼び，τ と υ は**単一化可能**(unifiable)という．θ_0 が τ と υ の単一化子で，他の任意の単一化子 θ_i に対して $\theta_0 \preceq \theta_i$ となるとき，θ_0 を τ と υ の**最汎単一化子**(most general unifier: m.g.u.)という．任意の2項 τ, υ が与えられたとき，τ と υ が単一化可能か否かを決定し，単一可能なら最汎単一化子を求めるアルゴリズムが存在する[17]．

例3 τ を $f(X, g(X))$, υ を $f(h(Y), Z)$とすると，$\theta_0 = \{h(Y)/X, g(h(Y))/Z\}$, $\theta_1 = \{h(c)/X, c/Y, g(h(c))/Z\}$ はそれぞれ τ と υ の単一化子で，$\theta_0 \preceq \theta_1$ である．他の任意の単一化子 θ_i を考えても $\theta_0 \preceq \theta_i$ となるので，θ_0 は2項の最汎単一化子である．□

$\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$における2項の対の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$上の2項関係と呼ぶ．$\mathfrak{R}$ をこのような2項関係とし，対(τ, υ)が $\mathfrak{R}$ に含まれることを $\tau \mathfrak{R} \upsilon$ と記述する．$\mathfrak{R}$ が項の構造に関して単調であるとは，任意の項 τ, υ, ξ について $\tau \mathfrak{R} \upsilon$ ならば $\xi[\tau] \mathfrak{R} \xi[\upsilon]$が成立することをいう．また，$\mathfrak{R}$ が代入に関して単調であるとは，任意の項 τ, υ と代入 θ について $\tau \mathfrak{R} \upsilon$ ならば$(\tau\theta) \mathfrak{R} (\upsilon\theta)$が成立することをいう．$\mathfrak{R}$ がこの2つの性質を同時に持つ，つまり項の構造と代入について単調であるとき(項上)**安定な**(stable)**関係**という．以降において，$\overset{*}{\mathfrak{R}}$ は $\mathfrak{R}$ の反射推移閉包(rflexive and transitive closure)を表す．

等式(equation)は $\lambda = \rho$ によって表される2項 λ と ρ の対である．等式の集合 E が与えられたとき，2項関係 E を**等号系**(equational system)と呼ぶ．$\leftrightarrow_E$ を E の対称かつ安定な閉包とする．すなわち，$\tau \leftrightarrow_E \upsilon$ であるのは，ある項 ξ, E の等式 $\lambda \doteq \rho$, 代入 θ があって，$\tau = \xi[\lambda\theta]$かつ $\upsilon = \xi[\rho\theta]$となるとき，かつこのときに限られる．ここで，$\lambda \doteq \rho$ は $\lambda = \rho$ または $\rho = \lambda$ を表す略記である．このとき，$\leftrightarrow_E$ の反射推移閉包 $\overset{*}{\leftrightarrow}_E$ を等号系 E による**合同関係**(congruence relation)という．

E 単一化は，2つの項を E によって合同にする代入を求める操作にほかならない．つまり，2項 τ, υ が E のもとで **E 単一化可能**(E-unifiable)となるのは，$\tau\theta \overset{*}{\leftrightarrow}_E \upsilon\theta$ なる代入 θ が存在することをいう．このような θ を，E を法とする τ と υ の単一化子，または τ と υ の **E 単一化子**(E-unifier)という．$\mathcal{U}_E(\tau, \upsilon)$によって τ と υ のすべての E 単一化子の集合を表すと，代入の集合 $\mathcal{U}$ は次のとき，かつこのときに限り τ と υ の **E 単一化子の完全集合**(complete set of E-unifiers)である．

(C1) $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_E(\tau, \upsilon)$.

(C2) 任意の $\theta \in \mathcal{U}_E(\tau, \upsilon)$について $\theta' \preceq_E \theta$ なる $\theta' \in \mathcal{U}$ が存在する．

(C3) 任意の $\theta \in \mathcal{U}$ について θ の定義域は $\mathcal{V}(\tau) \cup$

$\mathcal{V}(\nu)$に含まれる。

ここで，$\leq_E$ は E を法とした代入上の順序である．つまり，等号系 E と 2 つの代入 θ_1, θ_2 について $\theta_1 \leq_E \theta_2$ とは，ある代入 θ_1' が存在して，任意の項 τ について $\tau(\theta_1 \circ \theta_1') \overset{*}{\leftrightarrow}_E \tau\theta_2$ となることである．

例 4　$\mathcal{F}=\{f, g, h, a\}$，$\mathcal{V}=\{X, Y, \cdots\}$，$E=\{f(X, X)=g(X), h(a)=a\}$ とし，$f(h(Y), a)$と $g(h(a))$を E 単一化すべき 2 項とする．このとき，$\{\{a/Y\}\}$ は $f(h(Y), a)$と $g(h(a))$の E 単一化子の完全集合である．□

書換え規則(rewrite rule)は $\lambda \Rightarrow \rho$ によって表される 2 項 λ と ρ の対である．書換え規則の集合 R が与えられたとき，2 項関係 R を**項書換え系**(term rewriting system)と呼ぶ．$\to_R$ を R の安定な閉包とする．すなわち，$\tau \to_R \nu$ であるのは，ある項 ξ, R の書換え規則 $\lambda \Rightarrow \rho$, 代入 θ があって，$\tau = \xi[\lambda\theta]$かつ $\nu = \xi[\rho\theta]$となるとき，かつこのときに限られる．このとき，項 τ は R の書換え規則 $\lambda \Rightarrow \rho$ と代入 θ によって ν へ**簡約**(reduction)されたという．R の対称かつ安定な閉包を $\leftrightarrow_R$ で表すと，$\leftrightarrow_R$ の反射推移閉包 $\overset{*}{\leftrightarrow}_R$ のことを項書換え系 R による合同関係という．また，$\leftrightarrow_E$ または $\leftrightarrow_R$ を $\leftrightarrow_{E \cup R}$ で表すと，$\leftrightarrow_{E \cup R}$ の反射推移閉包 $\overset{*}{\leftrightarrow}_{E \cup R}$ を $E \cup R$ による合同関係という．

項 τ は $\tau \to_R \nu$ なる ν が存在しないとき**既約**(irreducible)である．$\tau \overset{*}{\to}_R \nu$ かつ既約な項 ν を項 τ の R に関する**既約項**(irreducible term)といい，$\tau\downarrow_R$ で表す．代入 θ は $\nu/X \in \theta$ なる項 ν がすべて既約なとき既約である．$\{\nu\downarrow_R/X \mid \nu/X \in \theta\}$ なる代入を θ の**既約代入**(irreducible substitution)といい，$\theta\downarrow_R$ で表す．項書換え系 R は，任意の項 ν_1, ν_2 について $\nu_1 \overset{*}{\leftrightarrow}_R \nu_2$ ならば $\nu_1 \overset{*}{\to}_R \varphi$ かつ $\nu_2 \overset{*}{\to}_R \varphi$ なる項 φ が必ず存在するとき，**合流的**(confluent)であるという．また，R において $\tau_1 \to_R \tau_2 \to_R \cdots$のような無限の簡約列が存在しないとき，$R$ は**停止的**(terminating)であるという．合流的かつ停止的な R を**完備**(complete)な項書換え系といい，完備な R における τ の既約項 $\tau\downarrow_R$ は一意なので，特に τ の R に関する**正規項**(normal term)と呼ぶ．正規代入も同様に定義する．

本稿においては，等式や書換え規則に出現する変数は任意の項を表すと考えられるので，複数の等式や書換え規則間にわたる変数の共有はないものとしてよい．また，代入によって導入される変数が常に新鮮な(fresh，代入前の項には現れていなかった)ものであるとしても一般性を失わない．

3　E 単一化と証明

本節では，E 単一化と等式の証明を関連づけ，さらにナローイングを用いた E 単一化が完全となる条件について考察する．まず，E 単一化と等式証明の関係を明らかにする．E を等号系，γ, δ を E 単一化可能な 2 項，θ をその E 単一化子の一つとすると，E 単一化の定義より $\gamma\theta \overset{*}{\leftrightarrow}_E \delta\theta$ が成立する．これは，以下のような有限列の存在を意味している．

$$\gamma\theta \equiv \sigma_0 \leftrightarrow_E \sigma_1 \leftrightarrow_E \cdots \leftrightarrow_E \sigma_l \equiv \delta\theta$$

つまり，E の等式を用いた項変形の繰返しによって，$\gamma\theta$ と $\delta\theta$ を結ぶことができる．これは，$\mathcal{F}$ に属さない特別な関数記号 $\simeq$ を導入して，次のように表現しても同じことである．上記の E, γ, δ, θ について項 μ が存在し，

$$(\gamma\theta \simeq \delta\theta) \equiv \tau_0 \leftrightarrow_E \tau_1 \leftrightarrow_E \cdots \leftrightarrow_E \tau_m \equiv (\mu \simeq \mu) \quad \textbf{(P1)}$$

となる有限列がある．以降，(P1)の形をした列を E による $\gamma\theta \simeq \delta\theta$ の**証明**(proof)と呼ぶ．

このような証明の概念は，項書換え系 R によっても与えることができる．R による合同関係が E によるものと等しい(つまり，$\overset{*}{\leftrightarrow}_E$ と $\overset{*}{\leftrightarrow}_R$ が一致する)とき，R は E を表現するという．このような R においては$(\gamma\theta \simeq \delta\theta) \overset{*}{\leftrightarrow}_R (\mu \simeq \mu)$が成立するので，(P1)に対応する列の存在は明らかである．この R がさらに合流的であるとき，ある項 μ' が存在して$(\gamma\theta \simeq \delta\theta) \overset{*}{\to}_R (\mu' \simeq \mu') \overset{*}{\leftarrow}_R (\mu \simeq \mu)$となる．そこで，

$$(\gamma\theta \simeq \delta\theta) \equiv \nu_0 \to_R \nu_1 \to_R \cdots \to_R \nu_k \equiv (\mu' \simeq \mu') \quad \textbf{(P2)}$$

なる形をした証明を，R に関して**正規**(normal)と呼ぶ．

例 5　例 4 における $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$, E, $f(h(Y), a)$, $g(h(a))$と 2 項の E 単一化子 $\{a/Y\}$ について，E による $f(h(a), a) \simeq g(h(a))$の証明の一つは，図 1(1)の列となる．また，$R=\{f(X, X) \Rightarrow g(X), h(a) \Rightarrow a\}$ とすると，R は E を表現し，かつ合流的である．このとき，R に関して正規な証明の一つは，図 1(2)の列となる．□

次にナローイングによる E 単一化を定義する．項書換え系 R, 2 項 τ, ν に対し，$\tau \rightsquigarrow_R \nu$ となるのは次のとき，かつこのときに限られる．ある項 ξ, σ, R の書換え規則 $\lambda \Rightarrow \rho$, 代入 θ が存在し，$\tau = \xi[\sigma]$かつ $\sigma\theta = \lambda\theta$, $\nu = \xi\theta$

$$f(h(a),a) \simeq g(h(a)) \leftrightarrow_E f(h(a),h(a)) \simeq g(h(a)) \leftrightarrow_E f(h(a),h(a)) \simeq f(h(a),h(a)) \qquad (1)$$

$$f(h(a),a) \simeq g(h(a)) \rightarrow_R f(a,a) \simeq g(h(a)) \rightarrow_R g(a) \simeq g(h(a)) \rightarrow_R g(a) \simeq g(a) \qquad (2)$$

$$f(h(Y),a) \simeq g(h(a)) \rightsquigarrow_{R[\{a/Y\}]} f(a,a) \simeq g(h(a)) \rightsquigarrow_{R[\varepsilon]} g(a) \simeq g(h(a)) \rightsquigarrow_{R[\varepsilon]} g(a) \simeq g(a) \qquad (3)$$

図1　$f(h(a),a) \simeq g(h(a))$ の証明

$[\rho\theta]$である．ここで，θ は σ と λ の最汎単一化子であり，σ は変数でないものとする．このとき，項 τ は R の書換え規則 $\lambda \Rightarrow \rho$ と代入 θ によって ν へナローイングされたといい，必要に応じて，用いた代入を $\tau \rightsquigarrow_{R[\theta]} \nu$ のように付加して記述する．ナローイングによる E 単一化とは，以下の列を得ることをいう．R, γ, δ を先のものとすると，

$$(\gamma \simeq \delta) = \varphi_0 \rightsquigarrow_{R[\theta_0]} \varphi_1 \rightsquigarrow_{R[\theta_1]} \cdots \rightsquigarrow_{R[\theta_{p-1}]} \varphi_p$$
$$= (\mu_L'' \simeq \mu_R'') \qquad \textbf{(P3)}$$

ここで，μ_L'' と μ_R'' は単一化可能であるとし，代入 θ_p をその最汎単一化子とする．このような列を $\gamma \simeq \delta$ からの R によるナローイング列という．このとき，ナローイング列から得られる代入 $\theta = (\theta_0 \circ \theta_1 \circ \cdots \theta_{p-1} \circ \theta_p)|_{V(\gamma \simeq \delta)}$ が，γ と δ の E 単一化子になっていることは明らかである．そこで，このような代入 θ を，R によるナローイングで求まる γ と δ の E 単一化子という．

Hullot は，R が完備であるとき，ナローイングによる E 単一化が完全であることを示した．証明の要点は，次の定理によって簡約列とナローイング列を対応づけることにある．

定理1(Hullot[13])　R を完備な項書換え系，γ を項，θ を R に関して正規な代入とする．このとき，$\gamma\theta$ からの任意の簡約列

$$\gamma\theta \equiv u_0 \rightarrow_R u_1 \rightarrow_R \cdots \rightarrow_R u_n$$

に対して，γ からのナローイング列

$$\gamma \equiv \varphi_0 \rightsquigarrow_{R[\alpha_0]} \varphi_1 \rightsquigarrow_{R[\alpha_1]} \cdots \rightsquigarrow_{R[\alpha_{n-1}]} \varphi_n$$

と $u_i \equiv \varphi_i\theta_i$ なる正規な代入 $\theta_i (0 \leq i \leq n)$ が存在し，

$$\theta|_{V(\gamma)} = \theta_0|_{V(\gamma)} = (\theta_0' \circ \theta_1)|_{V(\gamma)} = \cdots =$$
$$(\theta_0' \circ \cdots \circ \theta_{n-1}' \circ \theta_n)\theta|_{V(\gamma)}$$

が成立する．□

この定理では代入を正規なものに限っているが，既約な代入で考えても同じことがいえる．また，R を完備としているのは正規な代入が存在するための十分条件だから，既約な代入が存在するためには R が停止的であることで十分である．定理1を用いれば，以下のように(P2)の正規な証明と(P3)のナローイング列を対応づけることができる．

系1　R は E を表現する停止的な項書換え系，γ, δ は E 単一化可能な2項，θ は γ と δ の E 単一化子であるとする．このとき，$\gamma(\theta\downarrow_R) \simeq \delta(\theta\downarrow_R)$ の R に関して正規な証明 $(\gamma(\theta\downarrow_R) \simeq \delta(\theta\downarrow_R)) \xrightarrow{*}_R (\mu \simeq \mu)$ に対して，$\gamma \simeq \delta$ からのナローイング列 $(\gamma \simeq \delta) \rightsquigarrow_{R[\theta_0']} \cdots \rightsquigarrow_{R[\theta_{n-1}']} (\mu_L' \simeq \mu_R')$ と $(\mu \simeq \mu) = (\mu_L' \simeq \mu_R')\theta_n$ なる代入 θ_n が存在し，$(\theta\downarrow_R)|_{V(\gamma \simeq \delta)} = (\theta_0' \circ \cdots \circ \theta_{n-1}' \circ \theta_n)|_{V(\gamma \simeq \delta)}$ が成立する(図2)．□

系1において，代入 θ_n は μ_L' と μ_R' の単一化子となっているため，ナローイングで求まる E 単一化子 θ_N が θ より一般的，つまり $\theta_N \leq_E \theta$ であることは明らかである．

例6　例5における R は，合流的であることに加えて停止的でもあるため完備である．また，E 単一化子 $\{a/Y\}$ は R に関してすでに正規である．そこで，図1(2)の正規な証明に対応して，図1(3)の $f(h(Y),a) \simeq g(h(a))$ からのナローイング列が存在し，恒等代入 ε によ

$$\begin{tikzcd}
(\gamma(\theta\downarrow_R) \simeq \delta(\theta\downarrow_R)) = v_0 \arrow[r, "R"] & v_1 \arrow[r, "R"] & \cdots \arrow[r, "R"] & v_n \equiv (\mu \simeq \mu) \\
(\gamma \simeq \delta) \equiv \varphi_0 \arrow[u, "\theta\downarrow_R,\ \theta_0"'] \arrow[r, squiggly, "R[\theta_0']"] & \varphi_1 \arrow[u, "\theta_1"'] \arrow[r, squiggly, "R[\theta_1']"] & \cdots \arrow[r, squiggly, "R[\theta_{n-1}']"] & \varphi_n \equiv (\mu_L' \simeq \mu_R') \arrow[u, "\theta_n"']
\end{tikzcd}$$

図2　正規な証明とナローイング列の対応

って $(g(a)\simeq g(a))=(g(a))\sim g(a))\phi$，かつ $\{a/Y\}|_{\{Y\}}=(\{a/Y\}\circ\phi\circ\phi\circ\phi)|_{\{Y\}}$ が成立する．□

4 E 単一化のための推論規則

本節では，E 単一化の手続きを推論規則の形で与える．この手続きは，前節の議論に基づき，E による任意の証明が R に関して正規な証明となるように E, R を変換し，ナローイングで E 単一化子を獲得する．R の変換には完備化手続きと同様の推論規則を用いるが，通常 R に求められる停止性の条件を弱めることで，従来の完備化手続きにおける失敗を回避する．この拡張のために，R の書換え規則をそれ自身は向きを持たない**無向書換え規則**(orientation-free rewrite rule)へ拡張する．このような書換え規則を扱うためには，次の完全項簡約順序の概念が重要となる．

$>$ を $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$上の順序とする．$\tau_1>\tau_2>\cdots$ なる無限列が存在しないとき $>$ は**整礎**(well-founded)であるといい，安定かつ整礎な順序を**項簡約順序**(term reduction ordering)と呼ぶ．通常の R は，任意の書換え規則 $\lambda\rightarrow\rho\in R$ が項簡約順序 $>$ によって $\lambda>\rho$ となるならば停止的である．このとき，R は $>$ に関して停止的であるという．項簡約順序が基礎項の上で全順序であるとき，つまり任意の $\lambda,\rho\in\mathcal{T}(\mathcal{F})$について $\lambda\neq\rho$ ならば $\lambda>\rho$ または $\rho>\lambda$ のいずれかが成立するとき，$>$ を**完全項簡約順序**と呼ぶ．項簡約順序を与える順序づけ方法として，再帰経路順序(recursive path ordering)，分解順序(decomposition ordering)，部分項経路順序(path of subterms ordering)，勝抜き順序などが知られており[6]，多くのものが容易に完全項簡約順序へ拡張できる．ここでは，辞書式部分項順序(lexicographic subterm ordering)[22]を例にあげ，項簡約順序の説明を行う．

定義 1(辞書式部分項順序) $\mathcal{F}$ は順序 $\gg$ によって適当に整列されているものとする．辞書式部分項順序 $>_{lex}$ は，以下のように再帰的に定義される順序である．

(1) 変数 X は，いかなる項 ν に対しても $X>_{lex}\nu$ であることはない．

(2) 項 $\tau=f(\tau_1,\cdots,\tau_{\alpha(f)})$が項 ν に対して $\tau>_{lex}\nu$ となるのは，以下の場合，かつそれらの場合に限られる．

(2-1) ある $\tau_i(1\leq i\leq\alpha(f))$について $\tau_i>_{lex}\nu$ または，$\tau_i=\nu$ である．

(2-2) $\nu\equiv g(\nu_1,\cdots,\nu_{\alpha(g)})$で，各 $\nu_j(1\leq j\leq\alpha(g))$について $\tau>_{lex}\nu_j$ であり，しかも以下のいずれかが成立する．

(2-2-1) $f\gg g$ である．

(2-2-2) $f=g$ で，ある $i(1\leq i\leq\alpha(f))$があって $\tau_i>_{lex}\nu_i$，かつすべての $k(1\leq k<i)$について $\tau_k=\nu_k$ である．□

例 7 $>_{lex}$ を $\mathcal{F}=\{+,a,b\}$ 上の順序 $+\gg a\gg b$ によって定まる辞書式部分項順序とすると，たとえば 2 項 $a+b$ と $b+a$ の間には $a+b>_{lex}b+a$ が成立する．これは，定義 1 の(2-2)において $a+b>_{lex}b$ かつ $a+b>_{lex}a$ となり，さらに(2-2-2)において $+=+$ かつ $a>_{lex}b$ となることによる．□

このように定まる項簡約順序 $>_{lex}$ は，$\gg$ が $\mathcal{F}$ 上の全順序であるとき，かつこのときに限り完全項簡約順序となる．以降において，$>$ は適当に設定された完全項簡約順序であるとする．無向書換え規則を $\lambda\Leftrightarrow\rho$ によって表現すると，無向書換え規則による簡約やナローイングは，完全項簡約順序を用いて以下のように定義できる．

定義 2(拡張簡約) R を項書換え系，τ, ν を項とする．$\tau\rightarrow^{>}_{R}\nu$ となるのは，R の書換え規則 $\lambda\Leftrightarrow\rho$，項 ξ，代入 θ があって，$\tau\equiv\xi[\lambda\theta]$，$\nu\equiv\xi[\rho\theta]$，$\lambda\theta>\rho\theta$ が成立するとき，かつこのときに限られる．ここで，$\lambda\Leftrightarrow\rho$ は $\lambda\Leftrightarrow\rho$ または $\rho\Leftrightarrow\lambda$ を表す略記である．□

このとき，τ は $>$ を用いて R の書換え規則 $\lambda\Leftrightarrow\rho$ と代入 θ によって ν へ**拡張簡約**されたといい，必要に応じて，用いた書換え規則 $\lambda\Leftrightarrow\rho$ や代入 θ を

$\tau\rightarrow^{>}_{R[\lambda\Leftrightarrow\rho]}\nu$，$\tau\rightarrow^{>}_{R[\theta]}\nu$

のように付加して記述する．

定義 3(拡張ナローイング) R を項書換え系，τ, ν を項とする．$\tau\rightsquigarrow^{>}_{R}\nu$ となるのは，R の書換え規則 $\lambda\Leftrightarrow\rho$，項 ξ, σ，代入 θ があって，$\tau=\xi[\sigma]$，$\sigma\theta=\lambda\theta$，$\nu\equiv\xi\theta[\rho\theta]$，$\lambda\theta\npreceq\rho\theta$ が成立するとき，かつこのときに限られる．ここで θ は σ と λ の最汎単一化子であり，σ は変数でないものとする．□

このとき，τ は $>$ を用いて R の書換え規則 $\lambda\Leftrightarrow\rho$ と代入 θ によって ν へ**拡張ナローイング**されたといい，必要に応じて，用いた書換え規則 $\lambda\Leftrightarrow\rho$ や代入 θ を $\tau\rightsquigarrow^{>}_{R[\lambda\Leftrightarrow\rho]}\nu$，$\tau\rightsquigarrow^{>}_{R[\theta]}\nu$ のように付加して記述する．

ここで，完全項簡約順序は整礎であることより，R を無向書換え規則の集合としても，簡約に拡張簡約を用いれば R は停止的である．また，項簡約順序が代入に関して単調であることより，$>$ に関して停止的な R による(通常の)簡約やナローイングが，拡張簡約や拡張ナローイングの特殊な場合であることは明らかである．同じ理由により，定理1における簡約列とナローイング列の関係は，拡張簡約列と拡張ナローイング列においても成立する．以降においては，無向書換え規則，拡張簡約，拡張ナローイングのことを単に，書換え規則，簡約，ナローイングと呼び，$>$ が明らかなときは $\rightarrow^{>}_{R}$，$\rightsquigarrow^{>}_{R}$ を単に $\rightarrow_{R}$，$\rightsquigarrow_{R}$ と記述する．

例8　$R=\{X+Y \Leftrightarrow Y+X\}$，$>_{lex}$ を $\mathcal{F}=\{+, a, b\}$ 上の順序 $+ \gg a \gg b$ によって定まる辞書式部分項順序とする．すると，$a+b >_{lex} b+a$ となることより，項 $a+b$ は $>_{lex}$ を用いて R の書換え規則 $X+Y \Leftrightarrow Y+X$ と代入 $\{a/X, b/Y\}$ によって $b+a$ へ簡約される．つまり，$a+b \rightarrow^{>_{lex}}_{R} b+a$ である．しかし，$b+a$ は R に関して $>_{lex}$ を用いた既約項である．また，$R=\{f(a, X) \Leftrightarrow g(b, Y)\}$，$>_{lex}$ を $\mathcal{F}=\{f, g, a, b\}$ 上の順序 $f \gg g \gg a \gg b$ によって定まる辞書式部分項順序とすると，$f(a, a) \not\preceq_{lex} g(b, Y)$ となることより，項 $f(Z, Z)$ は $>_{lex}$ を用いて R の書換え規則 $f(a, X) \Leftrightarrow g(b, Y)$ と代入 $\{a/X, a/Z\}$ によって $g(b, Y)$ へナローイングされる．つまり，$f(Z, Z) \rightsquigarrow^{>_{lex}}_{R} g(b, Y)$ である．□

ナローイングされる項の間に以下の関係が成り立つことは，定義より明らかである．

補題1　R を項書換え系，τ，ν を項とする．$>$ を用いて R の書換え規則と代入 θ によって τ が ν へナローイングされる．つまり $\tau \rightsquigarrow^{>}_{R[\theta]} \nu$ となるとき，$\tau\theta \leftrightarrow_{R} \nu$ である．□

次に，完備化手続きにおいて重要な役割を果たす重像を導入する．2つの項 $\tau[\sigma]$ と λ について，σ と λ が単一化可能で，その最汎単一化子が θ であるとき，$\tau\theta[\sigma\theta]$ を $\tau[\sigma]$ と λ の**重像**(superposition)という．ただし σ は変数でないとする．2つの書換え規則の間に重像が存在するとき，重像はこれらの書換え規則によって異なる2項へ簡約される可能性を持つ．このような2項を等号で結んだ等式を拡張要対という．

定義4(拡張要対)　$\tau[\sigma] \Leftrightarrow \nu$ と $\lambda \Leftrightarrow \rho$ を R の書換え規則とする．これらの各一辺 $\tau[\sigma]$ と λ が重像 $\tau\theta[\sigma\theta]$ を持ち，$\tau\theta[\sigma\theta] \not\preceq \nu\theta$ かつ $\lambda\theta \not\preceq \rho\theta$ が成立するとき，等式 $\nu\theta = \tau\theta[\rho\theta]$ は $>$ を用いて R の書換え規則 $\tau[\sigma] \Leftrightarrow \nu$ と $\lambda \Leftrightarrow \rho$ から求まる**拡張要対**(extended critical pair)である．□

R を項書換え系とするとき，$CP^{>}(R)$ によって $>$ を用いて R から求まるすべての拡張要対の集合を表す．簡約やナローイングと同じ理由により，$>$ に関して停止的な R による従来の要対[11][22]が，拡張要対の特殊な場合であることも明らかである．以降においては，拡張要対のことを単に要対と呼び，$>$ が明らかなときは $CP^{>}(R)$ を単に $CP(R)$ と記述する．

例9　$R=\{f(g(X), X) \Leftrightarrow X, g(h(Y)) \Leftrightarrow Y\}$，$>_{lex}$ を $\mathcal{F}=\{f, g, h\}$ 上の順序 $f \gg g \gg h$ によって定まる辞書式部分項順序とする．これら2つの書換え規則の左辺同士は，単一化子 $\{h(Y)/X\}$ による重像 $f(g(h(Y)), h(Y))$ を持つ．このとき，$f(g(h(Y)), h(Y)) \not\preceq_{lex} h(Y)$ かつ $g(h(Y)) \not\preceq_{lex} Y$ であることより，$h(Y)=f(Y, h(Y))$ は $>_{lex}$ を用いて2つの書換え規則から求まる要対である．また，これ以外の要対は存在しないため，$CP^{>_{lex}}(R)=\{h(Y)=f(Y, h(Y))\}$ となる．□

これらの概念を用いてE単一化を行う推論規則 $\mathcal{J}^{>}_{E}$ を図3に示す．ここで，$\gamma \doteq \delta$ は $\gamma \simeq \delta$ または $\delta \simeq \gamma$ を表す略記で，E, R, $>$ はこれまでと同様に，それぞれ等号系，項書換え系，完全項簡約順序である．また，$\gamma \simeq \delta$ なる形の項，代入 θ，変数集合 V の3組 $(\gamma \simeq \delta, \theta, V)$ をゴールと呼ぶと，G, T はゴールの集合である．これら E, R, G, T の4組 $(E;R;G;T)$ を **E 単一化系**と呼ぶ．E 単一化系 $(E;R;G;T)$ に $\mathcal{J}^{>}_{E}$ の推論規則のいずれか1つを適用し $(E';R';G';T')$ を得ることを $\mathcal{J}^{>}_{E}$ の適用といい，$(E;R;G;T) \vdash_{\mathcal{J}^{>}_{E}} (E';R';G';T')$ もしくは，必要に応じて，適用した推論規則名を付加して $(E;R;G;T) \vdash_{\mathcal{J}^{>}_{E}[\text{規則名}]} (E';R';G';T')$ のように記述する．$(E_0;R_0;G_0;T_0) \vdash_{\mathcal{J}^{>}_{E}} (E_1;R_1;G_1;T_1) \vdash_{\mathcal{J}^{>}_{E}} \cdots$ なる列を $\mathcal{J}^{>}_{E}$ による**演繹**(derivation)といい，$\bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} E_j$ を E^{∞}，$\bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} R_j$ を R^{∞}，$\bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} G_j$ を G^{∞}，$\bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} T_j$ を T^{∞} で表す．

定義5($\mathcal{J}^{>}_{E}$ による E 単一化)　E を等号系，γ, δ を項とする．$\mathcal{J}^{>}_{E}$ による γ と δ の E 単一化とは，初期状態 $E_0=E$, $R_0=\phi$, $G_0=\{(\gamma \simeq \delta, \phi, \mathcal{V}(\gamma \simeq \delta))\}$，$T_0=\phi$ から，$\mathcal{J}^{>}_{E}$ による演繹 $(E_0;R_0;G_0;T_0) \vdash_{\mathcal{J}^{>}_{E}} (E_1;R_1;G_1;T_1) \vdash_{\mathcal{J}^{>}_{E}} \cdots$ を

E のための推論規則

$$E\text{ 生成}:\quad \frac{(E;R;G;T)}{(E\cup\{\tau\doteq v\};R;G;T)}\qquad \tau=v\in CP(R)\text{ のとき}$$

$$E\text{ 簡約}:\quad \frac{(E\cup\{\tau\doteq v\};R;G;T)}{(E\cup\{\tau\doteq v'\};R;G;T)}\qquad v\to_R v'\text{ のとき}$$

$$E\text{ 削除}:\quad \frac{(E\cup\{\tau\doteq\tau\};R;G;T)}{(E;R;G;T)}$$

R のための推論規則

$$R\text{ 生成}:\quad \frac{(E\cup\{\tau=v\};R;G;T)}{(E;R\cup\{\tau\Leftrightarrow v\};G;T)}$$

G のための推論規則

$$G\text{ 生成}:\quad \frac{(E;R;G;T\cup\{(\mu\simeq\nu,\theta,V)\})}{(E;R;G\cup\{(\mu'\dot{\simeq}\nu',\theta\circ\theta',V)\};T\cup\{(\mu\dot{\simeq}\nu,\theta,V)\})}\qquad (\mu\simeq\nu)\rightsquigarrow_{R[\theta']}(\mu'\simeq\nu')\text{ のとき}$$

$$G\text{ 削除}:\quad \frac{(E;R;G\cup\{(\gamma\simeq\delta,\theta,V)\};T)}{(E;R;G;T\cup\{(\gamma\dot{\simeq}\delta,\theta,V),(\square,(\theta\circ\theta')|_V,\square)\})}\qquad \theta'\text{ が }\gamma\text{ と }\delta\text{ の最汎単一化子のとき}$$

T のための推論規則

$$T\text{ 生成}:\quad \frac{(E;R;G\cup\{(\gamma\simeq\delta,\theta,V)\};T)}{(E;R;G;T\cup\{(\gamma\dot{\simeq}\delta,\theta,V)\})}$$

図3　推論規則 $\mathcal{J}_{\delta}^{\gamma}$

得ることである．このとき，$(\square,\theta,\square)\subset T^{\infty}$ なる代入 θ を，$\mathcal{J}_{\delta}^{\gamma}$ による γ と δ の E 単一化で求まる解代入という．□

ここでは，E 簡約・削除規則と G 削除規則を常に優先的に適用することにする．また，生成規則の適用について以下の仮定を設ける．

(F1)　$CP(R^{\infty})\subset\bigcup_{i=0}^{\infty}E_i$ である．

(F2)　$E^{\infty}=\phi$ である．

(F3)　$\{T^{\infty}$ から生成可能なゴール$\}\subset\bigcup_{i=0}^{\infty}G_i$ である．

(F4)　$G^{\infty}=\phi$ である．

ここで，T から生成可能なゴールとは，G 生成規則の適用によって生成できるゴールのことである．つまり，T の要素$(\gamma\simeq\delta,\ \theta,\ V)$について$(\gamma\simeq\delta)\rightsquigarrow_{R[\theta']}(\gamma'\simeq\delta')$であるゴール$(\gamma'\simeq\delta',\ \theta\circ\theta',\ V)$をいう．これらの仮定が満足されるとき，$\mathcal{J}_{\delta}^{\gamma}$ による演繹は公平(fair)であるといい，公平な演繹を得る E 単一化を公平な E 単一化と呼ぶ．

$\mathcal{J}_{\delta}^{\gamma}$ による演繹においては，$(\square,\ \theta,\ \square)\in T_i(0\leq i)$なるゴールが削除されることはない．よって，$(\square,\ \theta,\ \square)\in T_i$ ならば$(\square,\ \theta,\ \square)\in T^{\infty}$ となる．つまり，E 単一化の過程で得られるこのような代入 θ は，すべて解代入である．

例10　例4における $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$, E と2項$f(h(Y),a)$, $g(h(a))$について，$\mathcal{J}_{\delta}^{\gamma\infty}$ による E 単一化を行う．ここで，$>_{lex}$ は $\mathcal{F}=\{f,\ g,\ h,\ a\}$ 上の順序 $f\gg g\gg h\gg a$ によって定まる辞書式部分項順序である．すると，初期状態$(E_0;R_0;G_0;T_0)$から以下の演繹が得られる．

$$\begin{aligned}
&(E_0=\{f(X,X)=g(X),\ h(a)=a\};\\
&\ R_0=\phi;\\
&\ G_0=\{(f(h(Y),a)\simeq g(h(a)),\ \phi,\ \{Y\})\};\\
&\ T_0=\phi)\\
\vdash_{\mathcal{J}_{\delta}^{\gamma\infty}}&[\text{R 生成}]\\
&(E_1=E_0-\{f(X,X)=g(X)\};\\
&\ R_1=\{f(X,X)\Leftrightarrow g(X)\};G_1=G_0;T_1=\phi)\\
\vdash_{\mathcal{J}_{\delta}^{\gamma\infty}}&[\text{R 生成}]\\
&(E_2=\phi;R_2=R_1\cup\{h(a)\Leftrightarrow a\};\\
&\ G_2=G_1;T_2=\phi)\\
\vdash_{\mathcal{J}_{\delta}^{\gamma\infty}}&[\text{T 生成}]
\end{aligned}$$

$(E_3 = \phi; R_3 = R_2; G_3 = \phi;$

$T_3 = \{(f(h(Y), a) \simeq g(h(a)), \phi, \{Y\})\})$

$\vdash_{\mathcal{J}^{\geq}_{\delta}}^{w}$[G 生成]

$(E_4 = \phi; R_4 = R_3;$

$G_4 = \{f(h(Y), a) \simeq g(a), \phi, \{Y\})\}; T_4 = T_3)$

$\vdash_{\mathcal{J}^{\geq}_{\delta}}^{w}$[T 生成]

$(E_5 = \phi; R_5 \quad R_4; G_5 = \phi; T_5 = T_4 \cup$

$\{(f(h(Y), a) \simeq g(a), \phi, \{Y\})\})$

$\vdash_{\mathcal{J}^{\geq}_{\delta}}^{w}$[G 生成]

$(E_6 = \phi; R_6 = R_5;$

$G_6 = \{(f(a, a) \simeq g(a), \{a/Y\}, \{Y\})\}; T_6 \quad T_5)$

$\vdash_{\mathcal{J}^{\geq}_{\delta}}^{w}$[T 生成]

$(E_7 = \phi; R_7 = R_6; G_7 = \phi; T_7 = T_6 \cup$

$\{(f(a, a) \simeq g(a), \{a/Y\}, \{Y\})\})$

$\vdash_{\mathcal{J}^{\geq}_{\delta}}^{w}$[G 生成]

$(E_8 = \phi; R_8 = R_7;$

$G_8 = \{(g(a) \simeq g(a), \{a/Y\}, \{Y\})\}; T_8 = T_7)$

$\vdash_{\mathcal{J}^{\geq}_{\delta}}^{w}$[G 削除]

$(E_9 = \phi; R_9 \quad R_8; G_9 = \phi; T_9 = T_8 \cup$

$\{(g(a) \simeq g(a), \{a/Y\}, \{Y\}), (\sqcup, \{a/Y\}, \square)\})$

こうして，ゴール$(\square, \{a/Y\}, \square) \in T_9$が獲得され，$\{a/Y\}$が$\mathcal{J}^{\geq}_{\delta}$による$f(h(Y), a)$と$g(h(a))$の$E$単一化で求まる解代入となる．□

5　推論規則の完全性

$\mathcal{J}^{\geq}_{\delta}$による$E$単一化の実行は，前節でみたように，$E \cup R$による証明を徐々に正規なものへ近づける証明の変換である．この変換が任意の証明を正規化するものであれば，どんなE単一化子についてもそれより汎用なものを獲得でき，それゆえ$\mathcal{J}^{\geq}_{\delta}$による$E$単一化は完全となる．本節では，これを証明順序法を用いて示す．まず$\mathcal{J}^{\geq}_{\delta}$の健全性を示す．

補題 2($\mathcal{J}^{\geq}_{\delta}$ の健全性)　Eを等号系，γ, δを項とする．$\mathcal{J}^{\geq}_{\delta}$による$\gamma$と$\delta$の$E$単一化で得られる解代入は，$\gamma$と$\delta$の$E$単一化子である．□

以降においては，解代入のことを$\mathcal{J}^{\geq}_{\delta}$による$E$単一化で求まる$E$単一化子と呼ぶ．

$\mathcal{J}^{\geq}_{\delta}$の完全性を示すためには多少の準備が必要である．まず証明の一般形を定義し，これに対するいくつかの概念を導入する．Eを等号系，Rを項書換え系，τ_0, τ_1, …を項とするとき，$\tau_0 \Xi_1 \tau_1 \Xi_2 \cdots \Xi_m \tau_m$なる有限列を$E \cup R$のもとでの関係$\{\Xi_i\}$による$\tau_0$の証明という．ここで，$\Xi_i (1 \leq i \leq m)$は$\leftrightarrow_E$, $\leftrightarrow_R$, $\rightarrow_R$, $\leftarrow_R$, $\rightarrow_R$などの関係である．$\mathcal{P}$をこのような証明，θを代入，ξを項とする．このとき，$\mathcal{P}\theta$によって$(\tau_0\theta)\Xi_1 \cdots \Xi_m(\tau_m\theta)$なる証明を表し，また$\xi[\mathcal{P}]$によって$\xi[\tau_0]\Xi_1 \cdots \Xi_m \xi[\tau_m]$なる証明を表す．$\mathcal{P}$の部分証明とは，$\tau_j \Xi_{j+1} \cdots \Xi_k \tau_k (0 \leq j \leq k \leq m)$なる形の証明をいい，$\mathcal{Q}$が$\mathcal{P}$の部分証明であることを$\mathcal{P}[\mathcal{Q}]$と記述する．

次に，証明順序法で重要な役割を果たす証明簡約順序を導入する．$\sqsupset$を証明上の順序とする．$\sqsupset$が証明の構造に関して単調であるとは，任意の証明$\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$について$\mathcal{Q}_1 \sqsupset \mathcal{Q}_2$ならば$\mathcal{P}[\mathcal{Q}_1] \sqsupset \mathcal{P}[\mathcal{Q}_2]$が成立することをいう．$\sqsupset$が項の構造について単調であるとは，任意の証明$\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$と項ξについて$\mathcal{P} \sqsupset \mathcal{Q}$ならば$\xi[\mathcal{P}] \sqsupset \xi[\mathcal{Q}]$が成立することをいう．また，$\sqsupset$が代入について単調であるとは，任意の証明$\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$と代入θについて$\mathcal{P} \sqsupset \mathcal{Q}$ならば$(\mathcal{P}\theta) \sqsupset (\mathcal{Q}\theta)$が成立することをいう．$\sqsupset$がこれら3つの性質を同時に持つ，つまり証明の構造，項の構造，代入について単調であるとき(証明上)安定な順序という．安定な順序がさらに整礎である(すなわち，$\mathcal{P}_1 \sqsupset \mathcal{P}_2 \sqsupset \cdots$なる無限列が存在しない)とき，**証明簡約順序**(proof reduction ordering)と呼ぶ．

また，次のような多重集合順序を導入する．**多重集合**(multiset)とは，要素の重複を許す集合である．たとえば，$\{0, 0, 1, 2, 2, 2\}$は自然数の多重集合である．Sを集合，$>$をその上の順序とし，$\mathcal{M}(S)$によってSの要素からなる有限多重集合の全体を表すことにする．$>$に基づく$\mathcal{M}(S)$上の**多重集合順序**(multiset ordering)$>_{\mathcal{M}}$とは，次のように定まる順序である．$M_1, M_2 \in \mathcal{M}(S)$について，$X, Y \in \mathcal{M}(S)$が存在し，$M_1 = (M_2 - Y) \cup X$かつ任意の$y \in Y$について$x > y$なる$x \in X$が存在するとき，$M_1 >_{\mathcal{M}} M_2$である．このように定まる多重集合順序$>_{\mathcal{M}}$が整礎となるのは，順序$>$が整礎であるとき，かつこのときに限られる[5]．

多重集合を用いて具体的な証明簡約順序を定義する．当面，証明として**基礎証明**(ground proof)のみを考えることにする．ここで基礎証明とは，途中に出現する項がすべて基礎項である証明をいう．完全項簡約順序が基礎項の上で全順序であることより，基礎証明にはRのも

とでの関係 $\leftrightarrow_E$ による証明ステップが存在せず，すべて $\to_R$ または $\leftarrow_R$ によるものとなる．$\mathcal{P}$ を $E\cup R$ のもとでの関係 $\{\leftrightarrow_E, \to_R, \leftarrow_R\}$ による $\gamma_0\simeq\delta_0$ の基礎証明とする．$\mathcal{P}=(\gamma_0\simeq\delta_0)\Xi_1(\gamma_1\simeq\delta_1)\Xi_2\cdots\Xi_n(\gamma_n\simeq\delta_n)$ の各ステップ $(\gamma\simeq\delta)\Xi(\gamma'\simeq\delta')$ について，複雑度 $c(\gamma\simeq\delta, \gamma'\simeq\delta')$ を以下のように定める．

$$c(\gamma\simeq\delta, \gamma'\simeq\delta') = \begin{cases} \{\gamma, \delta, \gamma', \delta'\} & \Xi \text{ が } \leftrightarrow_E \text{ のとき} \\ \{\gamma, \delta\} & \Xi \text{ が } \to_R \text{ のとき} \\ \{\gamma', \delta'\} & \Xi \text{ が } \leftarrow_R \text{ のとき} \end{cases}$$

さらに，$\mathcal{P}$ のすべての証明ステップの複雑度の多重集合 $\{c(\gamma_0\simeq\delta_0, \gamma_1\simeq\delta_1), \ldots, c(\gamma_{n-1}\simeq\delta_{n-1}, \gamma_n\simeq\delta_n)\}$ を証明 $\mathcal{P}$ の複雑度といい，$c(\mathcal{P})$ で表す．これを用いて，証明上の順序 $\sqsupset_{\gtrsim}$ を次のように定義する．

定義 6　$\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ を証明，$\sqsupset_{\gtrsim}$ を証明上の順序とする．$\mathcal{P}\sqsupset_{\gtrsim}\mathcal{Q}$ となるのは，$c(\mathcal{P})(>_M)_M c(\mathcal{Q})$ が成立するとき，かつこのときに限られる．ここで，$>_M$ は $>$ に基づく多重集合順序，$(>_M)_M$ は $>_M$ に基づく多重集合順序である．□

例 11　$\mathcal{P}(\gamma_0\simeq\delta_0)\leftrightarrow_E(\gamma_2\simeq\delta_2)\leftarrow_R(\gamma_3\simeq\delta_3)$，$\mathcal{Q}=(\gamma_0\simeq\delta_0)\to_R(\gamma_1\simeq\delta_1)\leftrightarrow_E(\gamma_2\simeq\delta_2)\leftarrow_R(\gamma_3\simeq\delta_3)$ とすると，$c(\mathcal{P})=\{\{\gamma_0, \delta_0, \gamma_2, \delta_2\}, \{\gamma_3, \delta_3\}\}$，$c(\mathcal{Q})=\{\{\gamma_0, \delta_0\}, \{\gamma_1, \delta_1, \gamma_2, \delta_2\}, \{\gamma_3, \delta_3\}\}$ である．ここで，$\{\gamma_3, \delta_3\}=\{\gamma_3, \delta_3\}$ かつ $\{\gamma_0, \delta_0, \gamma_2, \delta_2\}>_M\{\gamma_0, \delta_0\}$，$\{\gamma_0, \delta_0, \gamma_2, \delta_2\}>_M\{\gamma_1, \delta_1, \gamma_2, \delta_2\}$ であることより，$c(\mathcal{P})(>_M)_M c(\mathcal{Q})$，つまり $\mathcal{P}\sqsupset_{\gtrsim}\mathcal{Q}$ が成り立つ．□

$>$ が項の上で安定かつ整礎であることより，$>_M$ は証明ステップの複雑度の上で安定かつ整礎となり，さらに $(>_M)_M$ は証明の複雑度の上で安定かつ整礎となる．よって，$\sqsupset_{\gtrsim}$ は証明簡約順序である．次の補題は，$\mathcal{U}^{>}_{\delta}$ による演繹によって任意の基礎証明が正規化されることを保証するものである．

補題 3　E_i を等号系，R_i を項書換え系，γ, δ を $E_i\cup R_i$ によって合同な基礎項，$\mathcal{P}$ を $E_i\cup R_i$ のもとでの関係 $\{\leftrightarrow_{E_i}, \to_{R_i}, \leftarrow_{R_i}\}$ による $\gamma\simeq\delta$ の基礎証明とし，$\mathcal{U}^{>}_{\delta}$ による演繹は公平であるとする．このとき，$\mathcal{P}$ が R_i に関する正規証明でないならば，$E_j\cup R_j(i<j)$ のもとでの関係 $\{\leftrightarrow_{E_j}, \to_{R_j}, \leftarrow_{R_j}\}$ による $\gamma\simeq\delta$ の基礎証明 $\mathcal{Q}$ が存在し，$\mathcal{P}\sqsupset_{\gtrsim}\mathcal{Q}$ かつ $\mathcal{Q}$ は R_j に関して正規である．□

R が(簡約において)停止的かつ合流的であっても，R によるナローイングは一般に停止的でも合流的でもない．このため，任意の基礎証明が正規化され，正規な証明に対応するナローイング列とそれによる E 単一化子の存在が保証されても，不用意にナローイングを行うと，うまくこれらを得ることができない．そこで，存在の保証されたナローイング列や E 単一化子が，$\mathcal{U}^{>}_{\delta}$ による E 単一化で常に獲得できることを示す．

補題 4　E を等号系，γ, δ を E 単一化可能な 2 項とする．また，$R_i(0\leq i)$ を $\mathcal{U}^{>}_{\delta}$ による γ と δ の公平な E 単一化における項書換え系，θ_N を R_i によるナローイングで求まる γ と δ の E 単一化子とする．このとき，$\mathcal{U}^{>}_{\delta}$ による E 単一化で求まる E 単一化子 θ_I が存在し，$\theta_I=\theta_N$ となる．□

$\mathcal{U}^{>}_{\delta}$ による E 単一化を公平としたのは，このように正規でない証明に対しては必ず E, R のための推論規則が適用でき，ナローイング列の獲得には G, T のための推論規則が適用できることを保証するためである．こうして，$\mathcal{U}^{>}_{\delta}$ による公平な E 単一化によって任意の基礎証明が正規化され，正規な証明には対応するナローイング列と E 単一化子が存在し，その E 単一化子は必ず獲得されることが保証された．この結果を変数を含んだ証明へ持ちあげることで，$\mathcal{U}^{>}_{\delta}$ の完全性を示すことができる．

補題 5($\mathcal{U}^{>}_{\delta}$ の完全性)　E を等号系，γ, δ を E 単一化可能な 2 項，θ を 2 項の E 単一化子とする．このとき，$\mathcal{U}^{>}_{\delta}$ による γ と δ の公平な E 単一化は，$\theta_N\leq_E\theta$ なる E 単一化子 θ_N を獲得する．□

これらの補題を用いて，$\mathcal{U}^{>}_{\delta}$ による E 単一化が E 単一化子の完全集合を求めることが示せる．

定理 2($\mathcal{U}^{>}_{\delta}$ による E 単一化子の完全集合)　E を等号系，γ, δ を項とする．$\mathcal{U}^{>}_{\delta}$ による γ と δ の公平な E 単一化で求まる E 単一化子の集合 $\{\theta|(\square, \theta, \square)\in T^{\infty}\}$ は，γ と δ の E 単一化子の完全集合である．□

この E 単一化は，E 単一化子の完全集合を求めるだけでなく，項書換え系 R の変換手続きとしてみることもできる．この手続きによって得られる R^{∞} が，基礎合流的であることを示す．ここで，R が基礎合流的とは，任意の基礎項 u_1, u_2 について $u_1\overset{*}{\leftrightarrow}_R u_2$ ならば $u_1\overset{*}{\to}_R\varphi$ か

つ $v_i \xrightarrow{*}_R \varphi$ なる基礎項 φ が存在することをいう．

定理3(基礎合流性)　E を等号系とし，R^{∞} を $\mathcal{I}^{>}_{\lambda}$ による公平な E 単一化で得られる項書換え系とする．このとき，R^{∞} は停止性に加えて基礎合流性を持つ．□

系2　E を等号系とし，R^{∞} を $\mathcal{I}^{>}_{\lambda}$ による公平な E 単一化で得られる項書換え系とする．このとき，R^{∞} の任意の書換え規則 $\lambda \Leftrightarrow \rho \in R^{\infty}$ について $\lambda > \rho$ または $\rho > \lambda$ が成立するならば，R^{∞} は完備である．□

次に演繹が飽和する場合について考察する．$\mathcal{I}^{>}_{\lambda}$ による E 単一化において $R_i = R^{\infty} (0 \leq i)$ となるとき，R_i は飽和(saturate)したという．また，T_i　T^{∞} となるとき，T_i は飽和したという．

系3　E を等号系とする．$\mathcal{I}^{>}_{\lambda}$ による公平な E 単一化において $R_i (0 \leq i)$ が飽和するとき，R_i は有限かつ基礎合流的な項書換え系である．□

等号系 E に対応する完備な R が有限個の書換え規則で表現されるとき，$\mathcal{I}^{>}_{\lambda}$ による公平な $\mathcal{E}$ 単一化によって $\mathcal{R}$ が飽和することは明らかである．これにより $\mathcal{E}$ 単一化は完備な $\mathcal{R}$ を獲得する．また同様に，基礎項上で完備な $\mathcal{R}$ が有限規則によって表現されるときも，$\mathcal{E}$ 単一化はこれを獲得する．$\mathcal{T}$ が飽和するときは，次の性質が成り立つ．

系4　E を等号系，γ, δ を項とする．$\mathcal{I}^{>}_{\lambda}$ による γ と δ の公平な $\mathcal{E}$ 単一化において $\mathcal{T}_i (0 \leq i)$ が飽和するとき，$\mathcal{U} = \{\theta | (\square, \theta, \square) \in T_i\}$ は γ と δ の E 単一化子の有限かつ完全な集合である．□

ここで，$\mathcal{U}$ は一般に極小ではないことに注意されたい．つまり，$\theta \in \mathcal{U}$ なる E 単一化子 θ について，$\theta' \in \mathcal{U}$ かつ $\theta' <_E \theta$ であるような E 単一化子 θ' が存在する場合がある．また，$\mathcal{U} = \phi$ となるような2項 γ と δ が E 単一化可能でないことは明らかである．

例12　例10の演繹を$(E_9; R_9; G_9; T_9)$から先へ進めようとしても，E 単一化系

$$
\begin{aligned}
(E_9 &= \phi; \\
R_9 &= \{f(X, X) \Leftrightarrow g(X), h(a) \Leftrightarrow a\}; \\
G_9 &= \phi; \\
T_9 &= \{(f(h(Y), a) \simeq g(h(a)), \phi, \{Y\}), \\
&\qquad (f(h(Y), a) \simeq g(a), \phi, \{Y\}), \\
&\qquad (f(a, a) \simeq g(a), \{a/Y\}, \{Y\}), \\
&\qquad (g(a) \simeq g(a), \{a/Y\}, \{Y\}), \\
&\qquad (\square, \{a/Y\}, \square)\})
\end{aligned}
$$

に対して適用できる $\mathcal{I}^{>}_{\lambda}$ の推論規則はない．つまり R_9，T_9 共に飽和している．これにより，$\{\{a/Y\}\}$ が E 単一化子の完全集合であることが確認できる．□

6　推論規則の効率化

$\mathcal{I}^{>}_{\lambda}$ による E 単一化は，R や T から要素を取り除くことなく，これらを単調に増加させるものである．この

E のための推論規則

$$
E\ 生成:\quad \frac{(E; R; G; T)}{(E \cup \{\tau \doteq v\}; R; G; T)} \quad \tau = v \in CP(R)\ のとき
$$

$$
E\ 簡約:\quad \frac{(E \cup \{\tau \doteq v\}; R; G; T)}{(E \cup \{\tau \doteq v'\}; R; G; T)} \quad v \rightarrow_R v'\ のとき
$$

$$
E\ 削除:\quad \frac{(E \cup \{\tau = \tau\}; R; G; T)}{(E; R; G; T)}
$$

R のための推論規則

$$
R\ 生成:\quad \frac{(E \cup \{\tau = v\}; R; G; T)}{(E; R \cup \{\tau \Leftrightarrow v\}; G; T)}
$$

$$
R\ 簡約:\quad \frac{(E; R \cup \{\lambda \Leftrightarrow \rho\}; G; T)}{(E; R \cup \{\lambda \Leftrightarrow \rho'\}; G; T)} \quad \rho \rightarrow_R \rho'\ かつ\ \lambda \succ \rho\ のとき
$$

$$
R\ 削除:\quad \frac{(E; R \cup \{\lambda \Leftrightarrow \rho\}; G; T)}{(E \cup \{\lambda' \doteq \rho\}; R; G; T)} \quad \lambda \rightarrow_{R\{\lambda'' \Leftrightarrow \rho'', \theta\}} \lambda'\ かつ\ \lambda \not\preceq \rho,\ \lambda''\theta \succ \rho''\theta,\ \lambda \rhd \lambda''\ のとき
$$

図4　推論規則 $\mathcal{I}^{>}_{\lambda}$(続く)

G のための推論規則

$$G\text{生成}: \frac{(E;R;G;T\cup\{(\mu\simeq\nu,\theta,V)\})}{(E;R;G\cup\{(\mu'\dot{\simeq}\nu',\theta\circ\theta',V)\};T\cup\{(\mu\dot{\simeq}\nu,\theta,V)\})} \quad (\mu\simeq\nu)\rightsquigarrow_{R[\theta']}(\mu'\simeq\nu')\text{ のとき}$$

$$G\text{簡約}: \frac{(E;R;G\cup\{(\gamma\dot{\simeq}\delta,\theta,V)\};T)}{(E;R;G\cup\{(\gamma\dot{\simeq}\delta',\theta,V)\};T)} \quad \delta\rightarrow_R\delta'\text{ のとき}$$

$$G\text{削除}: \frac{(E;R;G\cup\{(\gamma\simeq\delta,\theta,V)\};T)}{(E;R;G;T\cup\{(\gamma\dot{\simeq}\delta,\theta,V),(\Box,(\theta\circ\theta')|_V,\Box)\})} \quad \theta'\text{ が }\gamma\text{ と }\delta\text{ の最汎単一化子のとき}$$

T のための推論規則

$$T\text{生成}: \frac{(E;R;G\cup\{(\gamma\simeq\delta,\theta,V)\};T)}{(E;R;G;T\cup\{(\gamma\dot{\simeq}\delta,\theta,V)\})}$$

$$T\text{簡約}: \frac{(E;R;G;T\cup\{(\mu\dot{\simeq}\nu,\theta,V)\})}{(E;R;G\cup\{(\mu\dot{\simeq}\nu',\theta,V)\};T)} \quad \nu\rightarrow_R\nu'\text{ のとき}$$

$$T\text{削除}: \frac{(E;R;G;T\cup\{(\mu\simeq\mu,\theta,V)\})}{(E;R;G;T)}$$

図4　推論規則 $\mathcal{J}_{\gtrsim}$（続き）

ことは完全性への支障はないが，E 単一化の効率を考えると，これによる不要な要素や演繹が数多く発生するため，好ましい性質とはいえない．そこで，E の要素以外についても簡約を行い，冗長な要素を随時取り除いていく方法を考える．これによって演繹を効率化した推論規則 $\mathcal{J}_{\gtrsim}$ を図4に示す．ここで，$\rhd$ は項の具体化に関する順序である．つまり，2項 λ,μ について $\lambda\rhd\mu$ となるのは，λ のある部分が μ の具体例であり，しかも逆が真でない場合に限られる．他の記法は $\mathcal{J}^{>}_{0}$ で用いたものと同じである．

$\mathcal{J}_{\gtrsim}$ による E 単一化も $\mathcal{J}^{>}_{0}$ によるものと同様に定義できる．このとき，すべての簡約・削除規則を常に優先的に適用することにする．また，E 単一化を公平にするために生成規則の適用に関して設ける仮定も，$\mathcal{J}^{>}_{0}$ のものと同じとする．すると，次の定理が導かれる．

補題6（$\mathcal{J}_{\gtrsim}$ の健全性） E を等号系，γ,δ を項とする．$\mathcal{J}_{\gtrsim}$ による γ と δ の E 単一化で得られる解代入は，γ と δ の E 単一化子である．□

$\mathcal{J}^{>}_{0}$ のときと同じ理由により，$\mathcal{J}_{\gtrsim}$ による E 単一化の過程で得られる $(\Box,\theta,\Box)\in T_i(0\leq i)$ なる代入 θ は，すべて E 単一化子である．

補題7（$\mathcal{J}_{\gtrsim}$ の完全性） E を等号系，γ,δ を E 単一化可能な2項，θ を2項の E 単一化子とする．このとき，$\mathcal{J}_{\gtrsim}$ による γ と δ の公平な E 単一化は，$\theta_N\leq_E\theta$ なる E 単一化子 θ_N を獲得する．□

定理4（$\mathcal{J}_{\gtrsim}$ による E 単一化子の完全集合） E を等号系，γ,δ を項とする．$\mathcal{J}_{\gtrsim}$ による γ と δ の公平な E 単一化で求まる E 単一化子の集合 $\{\theta|(\Box,\theta,\Box)\in T^\infty\}$ は，γ と δ の E 単一化子の完全集合である．□

$\mathcal{J}_{\gtrsim}$ による公平な E 単一化で得られる R^∞ が（基礎）合流的であることも，$\mathcal{J}^{>}_{0}$ と同じである．ある i において R_i や T_i が飽和する条件についても同様に定義できる．$\mathcal{J}_{\gtrsim}$ による公平な E 単一化において等号系 E から得られる R_i が飽和するとき，この R_i は変数名の違いを除いて $E\cup G$ からの要素の選択順によらず一意に定まる．

7　E 単一化例

本節では，$\mathcal{J}_{\gtrsim}$ による E 単一化の例をいくつか示す．まず，Gallier らが[10]で用いた例を $\mathcal{J}_{\gtrsim}$ によって解く．

例13（Gallier の例） $E=\{f(Z_1)=g(Z_1),\ h(f(Z_2))=k(f(Z_2)),\ Z_3=f(g(Z_3))\}$ とし，$\mathcal{J}_{\gtrsim\omega}$ によって $i(X,h(g(Y)))$ と $i(g(f(X)),k(g(Y)))$ の E 単一化を行う[†2]．ここで，$>_{lex}$ は $\mathcal{F}=\{f,g,h,i,k\}$ 上の順序 $f\gg g\gg h\gg i\gg k$ によって定まる辞書式部分項順序である．

$$(E_0=\{f(Z_1)=g(Z_1),\ h(f(Z_2))=k(f(Z_2)),\ Z_3=$$

†2　[10]では関数記号 f を2通りの意味に用いているが，ここではこれらを明確に区別するために，新たな関数記号 i を導入した．

$f(g(Z_5))\}$;

$R_0 = \phi$;

$G_0 = \{i(X, h(g(Y))) \simeq i(g(f(X)), k(g(Y))), \phi, \{X\})\}$;

$T_0 = \phi)$

$\vdash_{ujm}$[R 生成]

$(E_1 = E_0 - \{f(Z_1) = g(Z_1)\}$;

$R_1 = \{f(Z_1) \Leftrightarrow g(Z_1)\}; G_1 = G_0; T_1 = \phi)$

$\vdash_{ujm}$[G 簡約]

$(E_2 = E_1; R_2 = R_1$;

$G_2 = \{(i(X, h(g(Y))) \simeq i(g(g(X)), k(g(Y))), \phi, \{X\})\}; T_2 = \phi)$

$\vdash_{ujm}$[E 簡約]

$(E_3 = E_2 - \{h(f(Z_2)) = k(f(Z_2))\}) \cup \{h(g(Z_2)) = k(f(Z_2))\}; R_3 = R_2; G_3 = G_2; T_3 = \phi)$

$\vdash_{ujm}$[E 簡約]

$(E_4 = (E_3 - \{h(g(Z_2)) = k(f(Z_2))\}) \cup \{h(g(Z_2)) = k(g(Z_2))\}; R_4 = R_3; G_4 = G_3; T_4 = \phi)$

$\vdash_{ujm}$[E 簡約]

$(E_5 = (E_4 - \{Z_5 = f(g(Z_5))\}) \cup \{Z_5 = g(g(Z_5))\}; R_5 = R_4; G_5 = G_4; T_5 = \phi)$

$\vdash_{ujm}$[R 生成]

$(E_6 = E_5 - \{Z_5 = g(g(Z_5))\}; R_6 = R_5 \cup \{Z_5 \Leftrightarrow g(g(Z_5))\}; G_6 = G_5; T_6 = \phi)$

$\vdash_{ujm}$[G 簡約]

$(E_7 = E_6; R_7 = R_6$

$G_7 = \{(i(X, h(g(Y))) \simeq i(X, k(g(Y))), \phi, \{X\})\}; T_7 = \phi)$

$\vdash_{ujm}$[R 生成]

$(E_8 = \phi; R_8 = R_7 \cup \{h(g(Z_2)) \Leftrightarrow k(g(Z_2))\}; G_8 = G_7; T_8 = \phi)$

$\vdash_{ujm}$[G 簡約]

$(E_9 = \phi; R_9 = R_8$;

$G_9 = \{(i(X, k(g(Y))) \simeq i(X, k(g(Y))), \phi, \{X\})\}; T_9 = \phi)$

$\vdash_{ujm}$[G 削除]

$(E_{10} = \phi; R_{10} = R_9; G_{10} = \phi$;

$T_{10} = \{i(X, k(g(Y))) \simeq i(X, k(g(Y))), \phi, \{X\}), (\square, \phi, \square)\})$

□

このように，E 単一化子として $\theta = \phi$，つまり恒等代入が求まる．これは，E 単一化すべき2項が E によって最初から合同であったことを意味する．したがって，任意の代入はこの2項の E 単一化子であり，彼らが示した E 単一化子はこの例において特に意味を持たない．さらに E 単一化を続けると，ある i において $R_i = \{f(Z_1) \Leftrightarrow g(Z_1), Z_5 \Leftrightarrow g(g(Z_5)), h(A) \Leftrightarrow k(A)\}$，$T_i = \phi$ となった時点で R_i，T_i 共に飽和する．このとき，R_i は($>_{lex}$ を用いて)完備な項書換え系である．

コンビネータ論理において，恒等コンビネータ I は通常 $S*K*K$ と定義される．ここでは，S と K の定義から E 単一化によって I コンビネータを求める．そのための準備として，I の存在を表明する式 $\exists i \forall x (i*x=x)$ を否定し，さらにスコーレム化して，等式の否定 $i*\$(i) \neq \$(i)$ を得る．ここで，\$ はスコーレム関数である．この両辺を E 単一化する．

例14(恒等コンビネータ)　$E = \{s*X*Y*Z = X*Z*(Y*Z), k*X*Y = X\}$ とし，$\vdash_{ujm}$ によって $I*\$(I)$ と $\$(I)$ の E 単一化を試みる．ここで，$>_{lex}$ は $\mathcal{F} = \{*, s, k, \$\}$ 上の順序 $* \gg s \gg k \gg \$$ によって定まる辞書式部分項順序である．なお，適用を表す $*$ は省略して示す．

$(E_0 = \{sXYZ = XZ(YZ), kXY = X\}$;

$R_0 = \phi$;

$G_0 = \{(I\$(I) \simeq \$(I), \phi, \{I\})\}$;

$T_0 = \phi)$

$\vdash_{ujm}$[R 生成]

$(E_1 = E_0 - \{kXY = X\}$;

$R_1 = \{kXY \Leftrightarrow X\}; G_1 = G_0; T_1 = \phi)$

$\vdash_{ujm}$[R 生成]

$(E_2 = \phi; R_2 = R_1 \cup \{sXYZ \Leftrightarrow XZ(YZ)\}; G_2 = G_1; T_2 = \phi)$

$\vdash_{ujm}$[E 生成]

$(E_3 = \{skXY = Y\}; R_3 = R_2; G_3 = G_2; T_3 = \phi)$

$\vdash_{ujm}$[R 生成]

$(E_4 = \phi; R_4 = R_3 \cup \{skXY \Leftrightarrow Y\}; G_4 = G_3; T_4 = \phi)$

$\vdash_{ujm}$[T 生成]

$(E_5 = \phi; R_5 = R_4; G_5 = \phi$;

$T_5 = \{(I\$(I) \simeq \$(I), \phi, \{I\})\})$

$\vdash_{s?}\leadsto$[G 生成]

$(E_6 = \phi; R_6 = R_5;$

$G_6 = \{(\$(skI') \simeq \$(skI'), \{skI'/I\}, \{I\})\}; T_6 = T_5)$

$\vdash_{s?}\leadsto$[G 削除]

$(E_7 = \phi; R_7 = R_6; G_7 = \phi; T_7 = T_6 \cup$

$\{(\$(skI') \simeq \$(skI'), \{skI'/I\}, \{I\}), (\square, \{skI'/I\}, \square)\})$

$\square$

このように，E 単一化子として $\theta=\{skI'/I\}$ が求まる．$s*k*I'$ は通常の恒等コンビネータの定義と比べ，より一般的なものとなっている．しかし，この定義を用いて$(s*k*I)*X$ を計算すると$(s*k*I)*X=k*X*(I*X)=X$ となり，実際に恒等コンビネータとしての機能を満足している．これにより，恒等コンビネータは通常の定義より一般的にできることがわかる．

8 E 単一化アルゴリズムの実現

ICOT における知的プログラミングシステムの研究開発において，項書換えは重要な基盤技術の一つとして位置づけられている[21]．Metis は，項書換えに基づくさまざまな推論技術の研究を目的として，逐次型推論マシン PSI 上に開発された実験環境である[19]．本節では，Metis における E 単一化の実現について述べる．

Metis における E 単一化アルゴリズムの概要を図5に示す．E は等号系，R は項書換え系，G, T はゴールの集合で，初期状態において E はユーザの与えた等号系，G は初期ゴールからなり，R, T は空である．ここで初期ゴールとは，E 単一化すべき γ, δ を $\simeq$ で結んだ式 $\gamma\simeq\delta$，恒等代入 ϕ，$\gamma\simeq\delta$ に出現する変数集合の組$(\gamma\simeq\delta, \phi, \mathcal{V}(\gamma\simeq\delta))$をいう．

select$(E\cup G)$は，$E\cup G$ から等式またはゴールのいず

```
procedure Eunif(γ0,δ0,Eq)                % γ0,δ0 は E 単一化すべき項，Eq は等式の集合
  E:=Eq                                  % 等式の集合
  R:=φ                                   % 書換え規則の集合
  G:={(γ0 ≃ δ0, φ, V(γ0 ≃ δ0))}          % ゴールの集合
  T:=φ                                   % (検討済み) ゴールの集合
  while E∪G≠φ do
    φ:=select(E∪G)
    if φ ∈ E then
      let φ be τ = υ
      E:=E−{τ ≐ υ}
      R:=R∪{τ ⇔ υ}                       %%% R 生成 %%%
      reduceERGT(τ ⇔ υ,E,R,G,T)
      generateEG(τ ⇔ υ,E,R,G,T)
    else (φ ∈ G)
      let φ be (γ ≃ δ,θ,V)
      G:=G−{(γ≃δ,θ,V)}
      if γ ≄ δ then                      %%% T 生成と T 削除 %%%
        T:=T∪{(γ ∼ δ,θ,V)}
      end_if
      generateG((γ ≃ δ,θ,V),R,G)
    end_if
  end_while
  output("saturated" * R * G)
end.

procedure reduceERGT(τ ⇔ υ,E,R,G,T)
        %%% G 簡約 %%%
  for ∀(γi ≃ δi,θi,Vi) ∈ G  s.t. (γi ≃ δi) →{τ⇔υ} (γ'i ≃ δ'i) do
    deleteG(γ'i↓R ≃ δ'i↓R,θi,Vi)
    G:=(G−{(γi ≃ δi,θi,Vi)}) ∪ {(γ'i↓R ≃ δ'i↓R,θi,Vi)}
  end_for
        %%% T 簡約 %%%
  for ∀(μj ≃ νj,θj,Vj) ∈ T  s.t. (μj ≃ νj) →{τ⇔υ} (μ'j ≃ ν'j) do
    deleteG(μ'j↓R ≃ ν'j↓R,θj,Vj)
    T:=T−{(μj ≃ νj,θj,Vj)}
    G:=G∪{(μ'j↓R ≃ ν'j↓R,θj,Vj)}
  end_for
```

図5 Metis における E 単一化アルゴリズム(続く)

```
        %%% E 簡約と E 削除 %%%
    for ∀τ_k = υ_k ∈E s.t. (τ_k = υ_k) →_{τ⇔υ} (τ'_k = υ'_k) do
        E:=E−{τ_k = υ_k}
        if τ'_k↓_R ≠ υ'_k↓_R then
            E:=E∪{τ'_k↓_R = υ'_k↓_R}
        end_if
    end_for
        %%% R 簡約・削除と E 削除 %%%
    for ∀λ_l ⇔ ρ_l ∈ (R−{τ ⇔ υ}) do
        if λ_l →_{τ⇔υ} λ'_l and λ_l ⋠ ρ_l and λ_l ⊳ τ then
            R:=R−{λ_l ⇔ ρ_l}
            if λ'_l↓_R ≠ ρ_l↓_R then
                E:=E∪{λ'_l↓_R = ρ_l↓_R}
            end_if
        elseif ρ_l →_{τ⇔υ} ρ'_l and λ_l ≻ ρ_l then
            R:=(R−{λ_l ⇔ ρ_l}) ∪ {λ_l = ρ'_l↓_R}
        end_if
    end_for
end.


procedure generateEG(τ ⇔ υ,E,R,G,T)
        %%% (新規則による)G 生成と G 簡約 %%%
    for ∀(μ_i ≃ ν_i, θ_i, V_i) ∈ T , ∀θ'_i, ∀μ'_i ≃ ν'_i s.t. (μ_i ≃ ν_i) ⇝_{(τ⇔υ)[θ'_i]} (μ'_i ≃ ν'_i) do
        deleteG(μ'_i↓_R ≃ ν'_i↓_R, θ_i∘θ'_i, V_i)
        G:=G∪{(μ'_i↓_R ≃ ν'_i↓_R, θ_i∘θ'_i, V_i)}
    end_for
        %%% E 生成と E 簡約・削除 %%%
    for ∀τ_j = υ_j ∈ CP({τ ⇔ υ} ⊎ R) do
        if τ_j↓_R ≠ υ_j↓_R then
            E:=E∪{τ_j↓_R = υ_j↓_R}
        end_if
    end_for
end.


procedure generateG((γ ≃ δ,θ,V),R,G)
        %%% (R による)G 生成と G 簡約 %%%
    for ∀θ_i∀γ_i ≃ δ_i s.t. (γ ≃ δ) ⇝_{R[θ_i]} (γ_i ≃ δ_i) do
        deleteG(γ_i↓_R ≃ δ_i↓_R, θ∘θ_i, V)
        G:=G∪{(γ_i↓_R ≃ δ_i↓_R, θ∘θ_i, V)}
    end_for
end.


procedure deleteG(γ ≃ δ,θ,V)
        %%% G 削除 %%%
    if ∃θ' s.t. γθ' ≡ δθ' then
        let θ_0 be m.g.u. of γ and δ
        output((θ∘θ_0)|_V & "continue?")     % 求めた E 単一化子の表示
        Ans:= input                           % ユーザからの指示入力
        if Ans="yes" then
            G:=G∪{(□,(θ∘θ_0)|_V ,□)}
        else
            stop
        end_if
    end_if
end.
```

図5　Metis における E 単一化アルゴリズム(続き)

れか一つを選択する関数である．この関数は，推論規則による E 単一化が公平であることに対応して，等式またはゴールの選択に関して公平である[†3]．これにより，E, G の中にいつまでも選択されずに残るような等式やゴールはない(F2, 4)．また $CP(R_1 \uplus R_2)$は，2つの項書換え系 R_1, R_2 について，R_1 と R_2 との間の要対のみをとった集合である．アルゴリズムは各ステップにおける E 生成の対象をこのように制限したり，G 生成の対象についても制限を設けている．このようにしても，初期状態からの実行を通してみれば，R から獲得可能な要対はすべて E に存在し，T から生成可能なゴールはす

†3　たとえば，等式やゴールに出現する関数記号の総数を比較して，少ないものから順に選択するなどの方法で公平な選択が実現できる．

べて G に存在することが帰納的に確認できる(F1, 3).
すると，このアルゴリズムによる E 単一化は，$\theta_{\geq}$ による公平な E 単一化と対応がつくため，E 単一化子の完全集合を求めることが保証される．

このアルゴリズムを実行すると，獲得された E 単一化子が次々と列挙される．これに対してユーザが停止の指示を与えるか，または E 単一化系が飽和状態に至ったときに実行は終了する．最初に与えた 2 項が E 単一化不能であった場合には，アルゴリズムが無限に実行されるか，系が飽和して完全集合として空集合が返されるかのいずれかである．E または G 生成規則に前述の制限を設けたことにより，アルゴリズムは一度生成規則の対象とした式を二度と対象に選ばない．また，生成規則の適用によって冗長な式が生成された場合でも，ただちに簡約・削除規則を適用することで，これを要素として獲得する前に除去する．これにより，系が飽和したときにはアルゴリズムの実行によって新たに生成される式がなくなり，飽和状態の検出は容易である．

第 7 節における例を Metis によって実行した様子を付録 B に載せる．完全性のためには無向書換え規則だけで十分なことは述べた通りであるが，実現においては向きづけ可能な規則を有向書換え規則として扱う方がはるかに効率的である．そこで，Metis においてはこの 2 つを区別し，有向規則に対しては従来の意味での簡約，ナローイング，要対の適用を行っている．実行例において，-> で結ばれた式は有向書換え規則を，<-> で結ばれた式は無向規則を表している．

9 おわりに

本稿では，完備な項書換え系を前提としない E 単一化手続きについて述べた．この手続きは任意の等式理論に対して完全である．ここでは，手続きの定義を推論規則の形で与え，証明順序法によって完全性の証明を行った．これによる証明は，手続きの実行順序などの詳細に依存しないため，推論規則と対応がつく範囲で手続きを変更しても完全性に影響のないことが保証される．また，範囲を超えて手続きを変更した場合でも，それが正しければ対応する推論規則を修正することで完全性について容易に検証できることが多い．このように，ここで提案した枠組は，さまざまな E 単一化手続きの完全性や健全性の議論に広く用いることができる．

謝　辞

本研究は，第 5 世代コンピュータプロジェクト (FGCS)の一環として行われたものである．研究の機会と激励をいただいた，ICOT 淵一博所長，古川康一次長，長谷川隆三室長，(株)東芝 システム・ソフトウェア技術研究所 西島誠一所長，高橋生宗部長，大筆豊部長に感謝いたします．また，日頃からご指導いただいている，ICOT 並列推論(旧記号計算)ワーキンググループメンバの方々や，(株)東芝 システム・ソフトウェア技術研究所楠井洋一研究主務，本位田真一研究主務，ならびに，本論文に関する誤りの指摘や有益な助言をいただいた査読者の方々に深く感謝いたします．

参考文献

[1] Baader, F. : The Theory of Idempotent Semigroups is of Unification Type Zero, *J. Autom. Reasoning*, Vol. 2 (1986), pp. 283-286.

[2] Bachmair, L., Dershowitz, N. and Hsiang, J. : Orderings for Equational Proofs, in *Proc. 1st IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, 1986, pp. 346-357.

[3] Chang, C. L. and Lee, R. C. T. : *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*, Academic Press, New York, 1973. 長尾真，辻井潤一訳：計算機による定理の自動証明，日本コンピュータ協会，1983.

[4] DeGroot, D. and Lindstrom, G., eds. : *Logic Programming : Functions, Relations, and Equations*, Prentice-Hall, 1986.

[5] Dershowitz, N. and Manna, Z. : Proving Termination with Multiset Orderings, *Comm. ACM*, Vol. 22, No. 8 (1979), pp. 465-467.

[6] Dershowitz, N. : Termination, in *Proc. 1st Int. Conf. Rewriting Techniques and Applications*, Lecture Notes in Computer Science 202, Springer-Verlag, 1985, pp. 180-224.

[7] Fages, F. : Associative-commutative Unification, in *Proc. 7th Int. Conf. on Automated Deduction*, Lecture Notes in Computer Science 170, Springer-Verlag, 1984, pp. 194-208.

[8] Fay, M. J. : First-Order Unification in an Equational Theory, in *Proc. 4th Workshop on Automated Deduction*, 1979, pp. 161-167.

[9] 二木厚吉，外山芳人：項書き換え型計算モデルとその応用，情報処理，Vol. 24, No. 2 (1983), pp. 133-146.

[10] Gallier, J. and Snyder, W. : A General Complete E-unification Procedure, in *Proc. 2nd Int. Conf. Rewriting Techniques and Applications*, Lecture Notes in Computer Science 256, Springer-Verlag, 1987, pp. 216-227.

[11] Huet, G. and Oppen, D. C. : Equations and Rewrite Rules : A Survey, *Formal Languages : Perspective and Open Problems* (Book, R. ed.), Academic Press, 1980, pp. 349-405.

[12] Huet, G. : A Complete Proof of Correctness of the Knuth-Bendix Completion Algorithm, *J. Comput. Syst.*

Sci., Vol. 23, No. 1 (1981), pp. 11-21.

[13] Hullot, J. M. : Canonical Forms and Unification, in *Proc. 5th Int. Conf. on Automated Deduction*, Lecture Notes in Computer Science 87, Springer-Verlag, 1980, pp. 318-334.

[14] Knight, K. : Unification : A Multidisciplinary Survey, *Comput. Surv.*, Vol. 21, No. 1 (1989), pp. 93-124.

[15] Knuth, D. E. and Bendix, P. B. : Simple Word Problems in Universal Algebras, *Proc. Computational problems in Abstract Algebra* (Leech, J. ed.), Pergamon Press, Oxford (1970), pp. 263-297; also in *Automation of Reasoning 2* (Siekmann, J. H. and Wrightson eds.), Springer-Verlag, 1983, pp. 342-376.

[16] Livesey, M., Siekmann, J. H., Szabo, P. and Unvericht, E. : Unification of Associativity, Commutativity, Destributivity and Idempotence Axioms, in *Proc. 4th Workshop on Automated Deduction*, 1979.

[17] Martelli, A. and Montanari, U. : An Efficient Unification Algorithm, *ACM Trans. Prog. Lang. Syst.*, Vol. 4, No. 2 (1982), pp. 258-282.

[18] Newman, N. H. A. : On Theories with a Combinatorial Definition of "Equivalence", *Annals of Math.*, Vol. 43, No. 2 (1942), pp. 223-243.

[19] Ohsuga, A. and Sakai, K. : Metis : A Term Rewriting System Generator, in *Proc. Symposium on Software Science and Engineering*, RIMS, 1986 also Tech. Memorandum TM-0226, ICOT, 1986.

[20] Plotkin, G. : Building-in Equational Theories, *Machine Intelligence* (Meltzer, B. and Michie, D. eds.), volume 7, American Elsevier, 1972, pp. 73-90.

[21] Sakai, K. : Toward Mechanization of Mathematics -Proof Checker and Term Rewriting System-, *Programming of Future Generation Computers* (Fuchi, K. and Nivat, M. eds.), North-Holland, 1988, pp. 335-390.

[22] 坂井公：Knuth-Bendix の完備化手続きとその応用，コンピュータソフトウェア，Vol. 4, No. 1 (1987), pp. 2-22.

[23] 坂井公，大須賀昭彦：証明順序法の基礎と応用，コンピュータソフトウェア，予定．

[24] Siekmann, J. H. : Unification Theory, *J. Symbolic Computation*, Vol. 7, No. 3 & 4 (1989), pp. 207-274.

[25] 山本章博：基底ナローイングを用いた拡張単一化アルゴリズムの完全性問題，コンピュータソフトウェア，Vol. 6, No. 3 (1989), pp. 35-45.

[26] 横井俊夫，相場亮：制約ロジック・プログラミング―知識処理への新しいパラダイム，情報処理，Vol. 30, No. 1 (1989), pp. 29-38.

A 定理，補題の証明

系 1 の証明：

定理 1 より明らか．■

補題 1 の証明：

ナローイングの定義より明らか．■

補題 2 の証明：

$(E_0;R_0;G_0;T_0)\vdash_{\mathcal{NE}}^{\gamma}\cdots\vdash_{\mathcal{NE}}^{\gamma}(E_m;R_m;G_m;T_m)$ を $\mathcal{O}_E^{\gamma}$ による E 単一化の演繹で，$(\square, \theta, \square)\in T_m$ とする．ゴール $(\gamma_i \simeq \delta_i, \theta_0\circ\cdots\circ\theta_j, V)\in T_i\cup G_i (0\leq j\leq i<m)$ について考えると，G 生成規則が適用されたときには $(\gamma_{i+1}\simeq\delta_{i+1}, \theta_0\circ\cdots\circ\theta_{j+1}, V)\in G_{i+1}$ が生成され，補題 1 より $(\gamma_i\theta_{j+1}\simeq\delta_i\theta_{j+1})\leftrightarrow_{R_i}(\gamma_{i+1}\simeq\delta_{i+1})$ となる．また G 削除規則適用時には $(\square, (\theta_0\circ\cdots\circ\theta_{j+1})|_V, \square)\in T_{i+1}$ が生成され，$\gamma_i\theta_{j+1}\equiv\delta_i\theta_{j+1}(\equiv\mu)$ となる．このとき，代入 $(\theta_0\circ\cdots\circ\theta_{j+1})|_V$ が解代入 θ である．他の規則を適用したときには $(\gamma_i\simeq\delta_i)\stackrel{*}{\leftrightarrow}_{E_i\cup R_i}(\gamma_{i+1}\simeq\delta_{i+1})$ であり，これより $(\gamma\theta\simeq\delta\theta)\leftrightarrow_{E_0\cup R_0}\cdots\leftrightarrow_{E_{m-1}\cup R_{m-1}}(\mu\simeq\mu)$ である．ここで，$E\cup R$ による合同関係について考えると，E, R のためのどの規則を適用しても $\stackrel{*}{\leftrightarrow}_{E_i\cup R_i}=\stackrel{*}{\leftrightarrow}_{E_{i+1}\cup R_{i+1}}$ である．したがって $(\gamma\theta\simeq\delta\theta)\stackrel{*}{\leftrightarrow}_E(\mu\simeq\mu)$ が成立し，解代入 θ は 2 項の E 単一化子である．■

補題 3 の証明：

まず，演繹による証明の変換が停止的であることを示す．$\sqsupset_\gtrsim$ が証明簡約順序であることより，E, R のための推論規則による証明の変換が，証明を $\sqsupset_\gtrsim$ において小さくすることを示せば十分である．簡単のため，左右対称な場合は省略する．

(E 生成規則) $(\gamma\simeq\delta)\leftarrow_R(\gamma'\simeq\delta')\rightarrow_R(\gamma''\simeq\delta'')$ なる部分証明を $(\gamma\simeq\delta)\leftrightarrow_E(\gamma''\simeq\delta'')$ へ変換する．このとき，$\{\gamma', \delta'\}>_M\{\gamma, \delta\}$ かつ $\{\gamma', \delta'\}>_M\{\gamma'', \delta''\}$ であることより $\{\{\gamma', \delta'\}, \{\gamma', \delta'\}\}(>_M)_M\{\{\gamma, \delta, \gamma'', \delta''\}\}$ が成立する．

(E 簡約規則) $(\gamma\simeq\delta)\leftrightarrow_E(\gamma'\simeq\delta')$ なる部分証明を $(\gamma\simeq\delta)\leftrightarrow_E(\gamma''\simeq\delta'')\leftarrow_R(\gamma'\simeq\delta')$ へ変換する．このとき，$\{\gamma', \delta'\}>_M\{\gamma'', \delta''\}$ であることより $\{\{\gamma, \delta, \gamma', \delta'\}\}(>_M)_M\{\{\gamma, \delta, \gamma'', \delta''\}, \{\gamma', \delta'\}\}$ が成立する．

(E 削除規則) $(\gamma\simeq\delta)\Xi_1(\gamma'\simeq\delta')\leftrightarrow_E(\gamma'\simeq\delta')\Xi_2(\gamma''\simeq\delta'')$ なる部分証明を $(\gamma\simeq\delta)\Xi_1(\gamma'\simeq\delta')\Xi_2(\gamma''\simeq\delta'')$ へ変換する．このとき，$\{c(\gamma\simeq\delta, \gamma'\simeq\delta'), \{\gamma', \delta, \gamma', \delta'\}, c(\gamma'\simeq\delta', \gamma''\simeq\delta'')\}(>_M)_M\{c(\gamma\simeq\delta, \gamma'\simeq\delta'), c(\gamma'\simeq\delta', \gamma''\simeq\delta'')\}$ が成立する．

(R 生成規則) 完全項簡約順序が基礎項の上で全順序あることより，$(\gamma\simeq\delta)\leftrightarrow_E(\gamma'\simeq\delta')$ なる部分証明を $(\gamma\simeq\delta)\rightarrow_R(\gamma'\simeq\delta')$ へ変換する．このとき，$\{\{\gamma, \delta, \gamma', \delta'\}\}(>_M)_M\{\{\gamma, \delta\}\}$ が成立する．

こうして変換の停止性が証明された．次に，正規でない基礎証明が変換可能であることを示す．基礎証明 $\mathcal{P}$ が正規でないとすると，$\mathcal{P}$ には $(g\simeq\delta)\leftarrow_R(\gamma'\simeq\delta')$

$\rightarrow_{R_i}(\gamma'' \simeq \delta'')$または$(\gamma \simeq \delta) \leftrightarrow_{E_i}(\gamma' \simeq \delta')$なる形の部分証明が含まれる．前者については演繹を公平にするための条件(F1)によって E 生成規則の適用が保証され，また後者の部分証明については(F2)によって R 生成規則の適用が保証される．■

補題 4 の証明：

ナローイング列を$(\gamma \simeq \delta) \equiv (\gamma_0 \simeq \delta_0) \rightsquigarrow_{R,[\theta_0]} (\gamma_1 \simeq \delta_1) \rightsquigarrow_{R,[\theta_1]} \cdots \rightsquigarrow_{R,[\theta_{m-1}]} (\gamma_m \simeq \delta_m)$とすると，これによって得られる E 単一化子 θ_N は$(\theta_0 \circ \cdots \circ \theta_m)|_V$ である．ここで，θ_m は γ_m と δ_m の最汎単一化子，$V=\mathcal{V}(\gamma \simeq \delta)$である．これに対し，ゴール列$(\gamma_0 \simeq \delta_0, \phi, V)/S_0 \rightarrow_{R_i} \cdots \rightarrow_{R_i} (\gamma_m \simeq \delta_m, \theta_0 \circ \cdots \circ \theta_{m-1}, V)/S_m \rightarrow_{R_i} (\square, \theta_N, \square)/S_{m+1}$ を対応づけ，これを $\gamma \simeq \delta$ の証明とする．ここで，S_j は各ゴールの状態に応じて，ゴールが T に存在するとき $S_j=0$，G に存在するとき 1，$G \cup T$ に存在しないとき 2 の値をとるものと定める．すべての $S_j=0$ である証明を正規とすると，任意の証明が正規化されるならば $\theta_I=\theta_N$ なる E 単一化子 θ_I の存在が保証される．証明の各ステップの複雑度をゴール状態の多重集合 $\{S, S'\}$ とし，$>_M$ を自然数の順序 $>$ に基づく多重集合順序とすると，$(>_M)_M$ によって証明の構造について単調かつ整礎な順序が得られる．まず証明の変換が停止的であることを示す．

(**G 生成規則**) $(\gamma \simeq \delta, \theta, V)/0 \rightarrow_R (\gamma' \simeq \delta', \theta', V)/2$ なる部分証明を$(\gamma \simeq \delta, \theta, V)/0 \rightarrow_R (\gamma' \simeq \delta', \theta', V)/1$ へ変換する．このとき，$\{0, 2\} >_M \{0, 1\}$ が成立する．

(**G 削除規則**) $(\gamma \simeq \delta, \theta, V)/1 \rightarrow_R (\square, \theta', \square)/2$ なる部分証明を$(\gamma \simeq \delta, \theta, V)/0 \rightarrow_R (\square, \theta', \square)/0$ へ変換する．このとき，$\{1, 2\} >_M \{0, 0\}$ が成立する．

(**T 生成規則**) $(\gamma \simeq \delta, \theta, V)/S \rightarrow_R (\gamma' \simeq \delta', \theta', V)/1$ なる部分証明を$(\gamma \simeq \delta, \theta, V)/S \rightarrow_R (\gamma' \simeq \delta', \theta', V)/0$ へ変換する．このとき，$\{S, 1\} >_M \{S, 0\}$ が成立する．

次に，正規でない証明が変換可能であることを示す．証明 $\mathcal{P}$ が正規でないなら，$\mathcal{P}$ には$(\gamma \simeq \delta, \theta, V)/0 \rightarrow_R (\gamma' \simeq \delta', \theta', V)/2$，もしくは$(\gamma \simeq \delta, \theta, V)/1$ なる部分証明が含まれる．前者については(F3)によって G 生成規則が，後者については(F4)によって T 生成規則が適用される．■

補題 5 の証明：

$\gamma\theta \sim \delta\theta$ の $E \cup R$ による(基礎でない)証明について，対応するナローイング列とそれによる E 単一化子が存在することをいえば十分である．このために，スコーレム化された $\gamma\theta \simeq \delta\theta$ の証明が正規化可能であることを示し，これに対応するナローイング列と E 単一化子の存在をいう．$\gamma(\theta\downarrow_R)$，$\delta(\theta\downarrow_R)$をスコーレム化した項を $\widehat{\gamma\theta}$，$\widehat{\delta\theta}$ とし，$\$_i (1 \le i \le n)$を $\widehat{\gamma\theta}$，$\widehat{\delta\theta}$ に出現するスコーレム関数，$\hat{\theta}$ を $\gamma\hat{\theta} \equiv \widehat{\gamma\theta}$，$\delta\hat{\theta} \equiv \widehat{\delta\theta}$ なる代入とする．$\hat{\mathcal{F}}$ を $\mathcal{F} \cup \{\$_i\}$ とし，$\hat{\gg}$ を $\hat{\mathcal{F}}$ 上の順序で，これを用いた項簡約順序 $\hat{>}$ が $> \subset \hat{>}$ かつ $\mathcal{T}(\hat{\mathcal{F}}, \mathcal{V})$上で完全であるものとする[†4]．すると，$\widehat{\gamma\theta}, \widehat{\delta\theta} \in \mathcal{T}(\hat{\mathcal{F}})$であることより，$\hat{>}$ を用いて $\widehat{\gamma\theta} \simeq \widehat{\delta\theta}$ の証明が正規化でき，これに対応して，$\hat{>}$ を用いた $\gamma \simeq \delta$ からのナローイング列と，$\hat{\theta}_N \hat{\le} \hat{\theta}$ なる E 単一化子 $\hat{\theta}_N$ が存在する．ここで，定義より $\hat{\le} \subset \le$ である．また，$\hat{\theta}_N$ によって導入される項はすべて $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$上の項である．このことは，この列が $>$ を用いた $\gamma \simeq \delta$ からのナローイング列であることを意味している．このとき，$\hat{\theta}_N$ が $\hat{\theta}_N \le \theta\downarrow_R$，つまり $\hat{\theta}_N \le_E \theta$ なる E 単一化子 θ_N である．■

定理 2 の証明：

E 単一化子の完全集合の条件(C1)～(C3)が満足されることを示す．補題 2 より，$\mathcal{G}^{>}_{E}$ による E 単一化で求まる E 単一化子はすべて γ と δ の E 単一化子である(C1)．補題 5 より，$\mathcal{G}^{>}_{E}$ による公平な E 単一化は，γ と δ の任意の E 単一化子 θ について $\theta' \le_E \theta$ なる E 単一化子 θ' を求める(C2)．また，G 削除規則の定義より，求まる E 単一化子の定義域が $\mathcal{V}(\gamma \simeq \delta)$に限られるのは明らかである(C3)．■

定理 3 の証明：

任意の基礎証明が正規となるのと同様の議論により，$u_1 \leftarrow_{E \cup R} u_2$ なる 2 項 $u_1, u_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$について，$u_1 \xrightarrow{*}_{R^\infty} \varphi \xleftarrow{*}_{R^\infty} u_2$ なる項 $\varphi \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$の存在を示すことができる．これより R^∞ は基礎項上において局所合流的である．さらに，R^∞ が停止的であることより，Newman の補題[18]を用いて R^∞ の基礎合流性が導かれる．■

系 2，系 3，系 4 の証明概略：

いずれの系も明らか．■

補題 6 の証明：

補題 2 と同じに議論による．■

†4　たとえば評価式部分項順序では，$\gg \subset \hat{\gg}$ かつ $\hat{\gg}$ が $\hat{\mathcal{F}}$ 上の全順序となるように $\gg$ を拡張すればよい．

補題 7 の証明概略：

$E \cup R$ のもとでの関係 $\{\leftrightarrow_E, \rightarrow_R, \leftarrow_R\}$ による $\gamma \simeq \delta$ の基礎証明について，各ステップの複雑度を次のように拡張する．$(\gamma \simeq \delta) \leftrightarrow_E (\gamma' \simeq \delta')$ のとき複雑度 $c'(\gamma \simeq \delta, \gamma' \simeq \delta')$ の値は $(\{\gamma, \delta, \gamma', \delta'\}, \perp, \perp)$，$(\gamma \simeq \delta) \rightarrow_{R[\lambda \Leftrightarrow \rho, \theta]} (\gamma' \simeq \delta')$ かつ $\lambda\theta > \rho\theta$ のときは $(\{\gamma, \delta\}, \lambda, \{\gamma', \delta'\})$，また $(\gamma \simeq \delta) \leftarrow_{R[\lambda \Leftrightarrow \rho, \theta]} (\gamma' \simeq \delta')$ かつ $\lambda\theta > \rho\theta$ のときは $(\{\gamma', \delta'\}, \lambda, \{\gamma, \delta\})$ とする．この複雑度上の順序 $\rhd>$ を，2 つの複雑度について第 1, 3 要素に $>_M$ を，第 2 要素に具体化順序 $\rhd$ を適用し，3 順序を辞書式に比較するものと定義する．証明上の順序 $\sqsupset_P$ を $\rhd>_M$ により導入すれば，これは証明簡約順序である．すると，E, R のための推論規則による証明の変換が，証明を $\sqsupset_P$ において小さくすることが示せる．

(R 簡約規則) $(\gamma \simeq \delta) \rightarrow_{R[\lambda \Leftrightarrow \rho]} (\gamma' \simeq \delta')$ なる部分証明を $(\gamma \simeq \delta) \rightarrow_{R[\lambda \Leftrightarrow \rho']} (\gamma'' \simeq \delta'') \leftarrow_{R[\lambda' \Leftrightarrow \rho']} (\gamma' \simeq \delta')$ へ変換する．このとき，$\{\gamma, \delta\} >_M \{\gamma', \delta'\}$ かつ $\{\gamma', \delta'\} >_M \{\gamma'', \delta''\}$ であることより $\{(\{\gamma, \delta\}, \lambda, \{\gamma', \delta'\})\} \rhd>_M \{(\{\gamma, \delta\}, \lambda, \{\gamma'', \delta''\}), (\{\gamma', \delta'\}, \lambda'', \{\gamma'', \delta''\})\}$ が成立する．

(R 削除規則) $(\gamma \simeq \delta) \rightarrow_{R[\lambda \Leftrightarrow \rho]} (\gamma' \simeq \delta')$ なる部分証明を $(\gamma \simeq \delta) \rightarrow_{R[\lambda' \Leftrightarrow \rho']} (\gamma'' \simeq \delta'') \leftrightarrow_E (\gamma' \simeq \delta')$ へ変換する．このとき，$\lambda \rhd \lambda'$ かつ $\{\gamma, \delta\} >_M \{\gamma', \delta'\}$, $\{\gamma, \delta\} >_M \{\gamma'', \delta''\}$ であることより $\{(\{\gamma, \delta\}, \lambda, \{\gamma', \delta'\})\} \rhd>_M \{(\{\gamma, \delta\}, \lambda', \{\gamma'', \delta''\}), (\{\gamma'', \delta'', \gamma', \delta'\}, \perp, \perp)\}$ が成立する．

他の規則については補題 3 と同様に示すことができ，変換の停止性がいえる．また，正規でない証明が変換可能であることも同様で，これより任意の基礎証明は正規化可能である．

正規な証明と簡約を伴うナローイング列は，次のように対応づけできる．正規化された証明における簡約列 $(\gamma(\theta\downarrow_R) \simeq \delta(\theta\downarrow_R)) \cdots (\tau_i \simeq \nu_i) \rightarrow_{R[\lambda \Leftrightarrow \rho,]} (\tau_{i+1} \simeq \nu_{i+1}) \cdots (\mu \simeq \mu)$ に，ナローイング列 $(\gamma \simeq \delta) \cdots (\gamma_i \simeq \delta_i) \rightsquigarrow_{R[\lambda \Leftrightarrow \rho,]} (\gamma_{i+1} \simeq \delta_{i+1}) \cdots (\mu_L \simeq \mu_R)$ が対応しているとする．ここで，$(\gamma_i \simeq \delta_i) \rightarrow_{R[\lambda' \Leftrightarrow \rho',]} (\gamma'_{i+1} \simeq \delta'_{i+1})$ なる簡約が可能とする．簡約はナローイングの特殊な場合であるため，これを新たなナローイング列 $(\gamma_i \simeq \delta_i) \rightsquigarrow_{R[\lambda' \Leftrightarrow \rho',]} (\gamma'_{i+1} \simeq \delta'_{i+1})$ とみなすことができるが，このとき簡約列との対応が失われる．ここで $(\tau_i \simeq \nu_i) \rightarrow_{R[\lambda' \Leftrightarrow \rho',]} (\tau'_{i+1} \simeq \nu'_{i+1})$ かつ既約な代入 θ'_{i+1} によって $(\tau'_{i+1} \simeq \nu'_{i+1}) \equiv (\gamma'_{i+1} \simeq \delta'_{i+1})\theta'_{i+1}$ である項 τ'_{i+1}, ν'_{i+1} が存在する．そこで，簡約列のステップを $(\tau_i \simeq \nu_i) \rightarrow_{R[\lambda' \Leftrightarrow \rho',]} (\tau'_{i+1} \simeq \nu'_{i+1})$ へ置き換えると，$(\tau'_{i+1} \simeq \nu'_{i+1}) \xrightarrow{*}_R (\mu \simeq \mu)$ であることより $(\tau'_{i+1} \simeq \nu'_{i+1})$ の証明が正規化できる．これに対応するナローイング列では，少なくとも $\gamma'_{i+1} \simeq \delta'_{i+1}$ について簡約列との対応がつく．このような簡約列の置き換えが無限につづくことを仮定すると，$\tau_0 \simeq \nu_0$ からの簡約が無限列となり，R の停止性に反する．したがってこの置き換えは停止的で，これを繰り返せば，簡約を伴ったナローイング列について系 1 と同様の対応を得ることができる．

ナローイングで求まる E 単一化子が $\mathcal{G}^{\geq}$ による E 単一化でも求まることや，変数を含む証明への結果の持ちあげは，$\mathcal{G}^{\geq}_{E}$ の場合と同様に示すことができる．■

定理 4 の証明：

補題 6(C1) と補題 7(C2)，さらに G 削除規則の定義(C3) より明らか．■

B　Metis による E 単一化の実行

B.1　例 4 の実行

```
EUNIF> f(h(y),a)=g(h(a))
            modulo [f(X,X)=g(X),h(a)=a]
            funs   [f,g,h,a]
            vars   [y] .
--------
        f(A,A) = g(A)
        h(a) = a
        f(h(A),a) = g(h(a)) with {A/y}
(R-GEN) f(A,A) => g(A)
(R-GEN) h(a) => a
(G-RED) f(h(A),a) = g(h(a))  -*->  ... = g(a)
```

```
(T-GEN) f(h(A),a) = g(a) with {A/y}
(G-GEN) f(a,a) = g(a) with {a/y}
(G-RED) f(a,a) = g(a)  -*->  g(a) = ...
(G-DEL) g(a) = g(a) with {a/y}
(T-GEN) [] = [] with {a/y}
E-unifier:  {a/y}
Continue ? yes
(T-GEN) g(a) = g(a) with {a/y}
(T-DEL) g(a) = g(a) with {a/y}
(SATURATED)
%%%% RULES %%%%
    f(A,A) => g(A)
    h(a) => a
%%%% E-UNIFIERS %%%%
    {a/y}
--------
E(quations): 2 given,     0 generated, 2 deleted.
R(ules):     2 generated, 0 deleted,
G(oals):     1 given,     1 generated, 2 deleted.
T(ested):    3 generated, 1 deleted.
Reduction:   2 step(s).
Narrowing:   1 step(s).
Runtime:     0.260 sec.
```

B.2 例13(Gallier)の実行

```
EUNIF> i(x,h(g(y)))=i(g(f(x)),k(g(y)))
             modulo [f(X)=g(X),h(f(X))=k(f(X)),X=f(g(X))]
             funs   [f,g,h,i,k]
             vars   [x,y] .
--------
        f(A) = g(A)
        h(f(A)) = k(f(A))
        A = f(g(A))
        i(A,h(g(B))) = i(g(f(A)),k(g(B))) with {A/x,B/y}
(R-GEN) f(A) => g(A)
(G-RED) i(A,h(g(B))) = i(g(f(A)),k(g(B)))  -*->  ... = i(g(g(A)),k(g(B)))
(E-RED) h(f(A)) = k(f(A))  -*->  h(g(A)) = k(g(A))
(E-RED) A = f(g(A))  -*->  ... = g(g(A))
(R-GEN) g(g(A)) => A
(G-RED) i(A,h(g(B))) = i(g(g(A)),k(g(B)))  -*->  ... = i(A,k(g(B)))
(E-GEN) g(A) = g(A)
(E-DEL) g(A) = g(A)
(R-GEN) h(g(A)) => k(g(A))
(G-RED) i(A,h(g(B))) = i(A,k(g(B)))  -*->  i(A,k(g(B))) = ...
(G-DEL) i(A,k(g(B))) = i(A,k(g(B))) with {A/x,B/y}
(T-GEN) [] = [] with {A/x,B/y}
E-unifier:  {A/x,B/y}
Continue ? yes
```

```
(T-GEN) i(A,k(g(B))) = i(A,k(g(B))) with {A/x,B/y}
(T-DEL) i(A,k(g(B))) = i(A,k(g(B))) with {A/x,B/y}
(E-GEN) h(A) = k(g(g(A)))
(E-RED) h(A) = k(g(g(A)))  -*->  ... = k(A)
(R-GEN) h(A) => k(A)
(R-RED) h(g(A)) => k(g(A))  -*->  k(g(A)) => ...
(R-DEL) k(g(A)) => k(g(A))
(SATURATED)
%%%% RULES %%%%
    f(A) => g(A)
    g(g(A)) => A
    h(A) => k(A)
%%%% E-UNIFIERS %%%%
    {A/x,B/y}
--------
E(quations): 3 given,     2 generated, 5 deleted.
R(ules):     4 generated, 1 deleted,
G(oals):     1 given,     0 generated, 1 deleted.
T(ested):    2 generated, 1 deleted.
Reduction:   8 step(s).
Narrowing:   0 step(s).
Runtime:     0.400 sec.
```

B.3 例14(恒等コンビネータ)の実行

```
EUNIF> x*f(x)=f(x)
            modulo [s*X*Y*Z=X*Z*(Y*Z),k*X*Y=X]
            funs   [s,k,f,(*)]
            vars   [x] .
--------
        s*A*B*C = A*C*(B*C)
        k*A*B = A
        A*f(A) = f(A) with {A/x}
(T-GEN) A*f(A) = f(A) with {A/x}
(R-GEN) k*A*B => A
(G-GEN) A = f(k*A) with {k*A/x}
(T-GEN) A = f(k*A) with {k*A/x}
(R-GEN) s*A*B*C <=> A*C*(B*C)
(E-GEN) A*B*(C*B) = A*B*(C*B)
(E-DEL) A*B*(C*B) = A*B*(C*B)
(E-GEN) s*(s*A)*B*C = A*(B*C)*(C*(B*C))
(E-GEN) s*s*A*B*C = B*C*(A*B*C)
(E-GEN) A = s*k*B*A
(E-GEN) A*(B*C)*(C*(B*C)) = s*(s*A)*B*C
(E-DEL) A*(B*C)*(C*(B*C)) = s*(s*A)*B*C
(E-GEN) s*A*B*C = s*A*B*C
(E-DEL) s*A*B*C = s*A*B*C
(E-GEN) A*(B*C) = s*(k*A)*B*C
(E-GEN) A*B*(C*B)*(D*B) = s*(s*A*C)*D*B
```

```
(E-GEN) s*A*B*C*(D*(B*C)) = s*(A*C)*D*(B*C)
(E-GEN) A*B*C = s*A*(k*C)*B
(E-GEN) A*B*(C*B*(D*B)) = s*A*(s*C*D)*B
(E-GEN) A*(B*C)*(s*D*B*C) = s*A*(D*C)*(B*C)
(R-GEN) s*k*A*B => B
(G-GEN) f(s*k*A) = f(s*k*A) with {s*k*A/x}
(G-DEL) f(s*k*A) = f(s*k*A) with {s*k*A/x}
(T-GEN) □ = □ with {s*k*A/x}
E-unifier:  {s*k*A/x}
Continue ? no
--------
E(quations): 2 given,     12 generated, 6 deleted.
R(ules):     3 generated, 0 deleted,
G(oals):     1 given,     2 generated, 3 deleted.
T(ested):    3 generated, 0 deleted.
Reduction:   0 step(s).
Narrowing:   2 step(s).
Runtime:     0.880 sec.
```