ICOT Technical Report: TR-597

TR-597

命題論理式から導かれる
コネクショニストモデル

富田 兼一

October, 1990

ICOT

Mita Kokusai Bldg. 21F
4-28 Mita 1-Chome
Minato-ku Tokyo 108 Japan

(03)3456-3191 ~ 5
Telex ICOT J32964

Institute for New Generation Computer Technology

命題論理式から導かれるコネクショニストモデル

冨山兼一
新世代コンピュータ技術開発機構
tomita@icot.or.jp

論理式とコネクショニストモデル(人工ニューラルネット)の対応を考察する。命題論理式にエネルギーを対応づけること、およびそのエネルギーから一般化された相互結合型ネットワークを機械的に構成することを扱う。

Connectionist Model derived from Propositional Logic Formula

Kenichi Tomita
ICOT Research Center
Institute for New Generation Computer Technology
4-28,Mita 1-chome,Minato-ku,Tokyo 108,Japan

We investigate a correspondence between logic formula and connectionist model(artificial neural network). First, we correspond energy to propositional logic formula. Next, we construct generalized Hopfield-type network from the energy.

1 はじめに

命題論理式とエネルギーとコネクショニストモデル(人工ニューラルネット)の対応を考察する。既に Johnson によって命題論理式とエネルギーと相互結合型ネットワークの対応関係が少し調べられている。しかし彼はどのように論理式からエネルギーを機械的に定義するかという問題を扱わなかった。また、彼はエネルギーに対応するネットワークを構成する問題についても伝統的な手法であるパラメータ比較で扱っている。本来ならネットワークはエネルギーの偏微分から自動的に構成すべきである。そこで本稿では論理式とエネルギーの対応、エネルギーとネットワークの対応の順に扱い、ついでに相互結合型ネットワークの一般化も考察する。それから論理式 - コネクショニストモデル対応の意義についても考える。

2 命題論理式に対応するエネルギー

命題論理式に対応するエネルギーを求める。

2.1 命題論理式に関する制限

命題論理式は論理積標準形 (conjunctive normal form) であるとする。

2.2 基本的な対応関係

命題の真偽は 1,0 に対応づける。論理演算と算術演算は論理和と算術和、論理積と算術積、否定と算術差が対応している。つまり、x と y の論理和が真ならば $x+y \geq 1$ が成立する。x と y の論理積が真ならば $x \times y = 1$ が成立する。x の否定が真ならば $1-x=1$ が成立する。というように簡単な対応がとれる。まとめると ($\vee_i$ は i について論理和を取り、$\wedge_j$ は j について論理積を取る)

$$\vee_i\, x_i \Leftrightarrow \sum_i x_i \geq 1 \tag{1}$$

$$\wedge_j\, x_j \Leftrightarrow \prod_j x_j = 1 \tag{2}$$

$$\neg x_k \Leftrightarrow 1 - x_k = 1 \tag{3}$$

2.3 命題論理式とエネルギーの対応

論理演算と算術演算の対応関係を利用して命題論理式からエネルギーを導く。まず命題論理式充足可能性判定問題をエネルギー最小化問題に還元する。簡単な具体例で考える。命題論理式 F を

$$F = (x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y) \tag{4}$$

とする。命題論理式 F からエネルギー E を次のように導ける。命題論理式の二重否定をとると

$$\neg\neg\{(x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)\} \tag{5}$$

内側の否定についてド. モルガンの法則を適用し

$$\neg\{(\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y)\} \tag{6}$$

論理和と算術和、論理積と算術積、否定と算術差の対応関係を利用すると

$$\neg\{(1-x) \times (1-y) + x \times y \geq 1\} \tag{7}$$

から

$$(1-x) \times (1-y) + x \times y = 0 \tag{8}$$

となる。

この方程式の左辺をエネルギーとみなす。命題論理式に対応するエネルギー E は

$$E = (1-x) \times (1-y) + x \times y \tag{9}$$

となる。

このエネルギー E は $E \geq 0$ を満たす。つまりエネルギーが最小の時 $E=0$ となる。しかも、論理式 F が真の組み合わせでエネルギー E がゼロになるようになっている。結局

$$F(x,y) = true \Leftrightarrow E(x,y) = 0 \tag{10}$$

従ってエネルギー最小化により充足可能性判定が可能となる。

3　エネルギーに対応するネットワーク

エネルギーに対応するネットワークは x_n の入力を $-\frac{\partial E}{\partial x_n}$ とすることによって構成される。

$$E = 2xy - x - y + 1 \tag{11}$$

エネルギーを x, y で偏微分すると、

$$-\frac{\partial E}{\partial x} = -2y + 1 \tag{12}$$

$$-\frac{\partial E}{\partial y} = -2x + 1 \tag{13}$$

各ユニットの出力関数を f とすると、

$$x = f(-2y + 1) \tag{14}$$

$$y = f(-2x + 1) \tag{15}$$

この方程式に対応するネットワークは次のようになる。

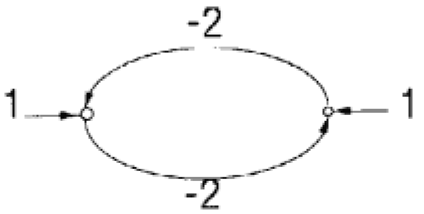

図 1. 対応するネットワーク

このネットワークは相互結合型に属する。

4　制約充足

今までの具体例を使って、命題論理式で記述された制約を充足する真理値を求めてみる。各ユニットの出力関数は次のようなステップ関数であるとする。

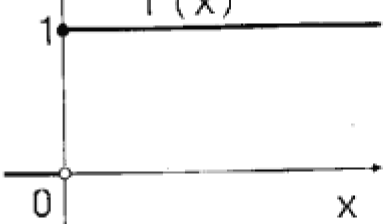

図 2. 出力関数

ネットワークの初期値として $x_i = 0.5$ を用いる。反復計算によって
$x = 0.5 \to 1.0 \to 1.0$
$y = 0.5 \to 0.5 \to 0.0$
図 3 の正方形の内側の数字は xy 平面上のエネルギー。

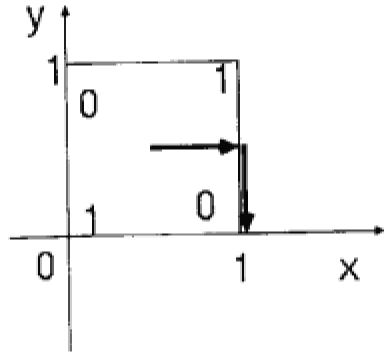

図 3. 状態遷移

$E(1,0) = 0$ であり、x が真かつ y が偽の時に論理式 F は真となる。このやりかたでエネルギー最小化に成功する保証はない。しかしこの場合には充足可能であることが示され、論理式を充足する真偽の割り当てが求まった。

5　相互結合の一般化

より一般的な命題論理式を考察することにより自然に相互結合型ネットワークを一般化できる。

5.1　相互結合

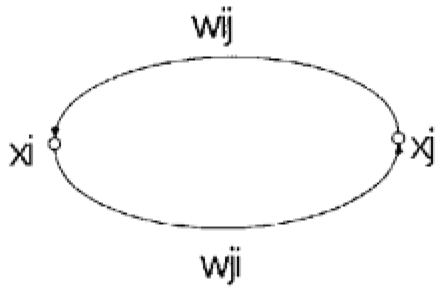

図 4. 相互結合

相互結合型ネットワークは、各ユニット間の結合の重み (weight) が対称、即ち

$$w_{ij} = w_{ji} \tag{16}$$

となっている。この結合だけのエネルギーは

$$E = -w_{ij}x_ix_j \tag{17}$$

$x_i = f(-\frac{\partial E}{\partial x_i})$ から図4のように表現できる。

5.2 一般化された相互結合

(9) 式の一般の場合を考えると、エネルギーは

$$E = -w_{1\dots n}x_1\dots x_n \tag{18}$$

の和となる。このエネルギーを各ユニットに対応する変数 x_i で偏微分すると以下のようになる。

$$-\frac{\partial E}{\partial x_i} = w_{1\cdots n}x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n \tag{19}$$

$x_i = f(-\frac{\partial E}{\partial x_i})$ から図5のように表現できる。

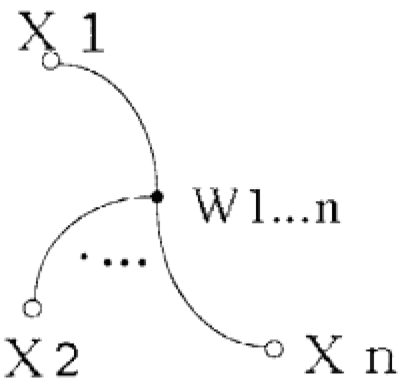

図5. 一般化された相互結合

図5を見てみるとユニット x_i は x_i に結合している $x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n$ の $n-1$ 個のユニットからの影響を重み $w_{1\cdots n}$ で受ける。同様に x_1 から x_n は他の $n-1$ 個の影響を重み $w_{1\cdots n}$ で受ける。この $n = 2$ の場合がちょうど相互結合に相当する。つまり、相互結合を特別の場合とするような結合になっている。また Johnson は n ≦ 3 の場合を扱った。

6 エネルギーの一般化

相互結合型ネットワークのエネルギーは

$$E = -\sum_{i<j} w_{ij}x_ix_j + \sum_i \theta_i x_i \tag{20}$$

である。そして Johnson の扱ったエネルギーは次式のように3つのユニットの結合まで考慮したものであった。

$$E = -\sum_{i<j<k} w_{ijk}x_ix_jx_k - \sum_{i<j} w_{ij}x_ix_j + \sum_i \theta_i x_i \tag{21}$$

これをさらに一般化する。エネルギーに対応するネットワークを図6のような超グラフ (hypergraph) と考え

$$E = -\sum_{\beta\in\alpha} w_\beta \prod_{k\in\beta} x_k + \sum_i \theta_i x_i \tag{22}$$

ただし、β は超辺 (hyper-edge, 頂点の集合)、α は β の集合とする。β に含まれるユニットは一般化された相互結合で結ばれているとする。さらに $w_i = -\theta_i$ として閾値を特別扱いしなければ

$$E = -\sum_{\beta\in\alpha} w_\beta \prod_{k\in\beta} x_k \tag{23}$$

となる。

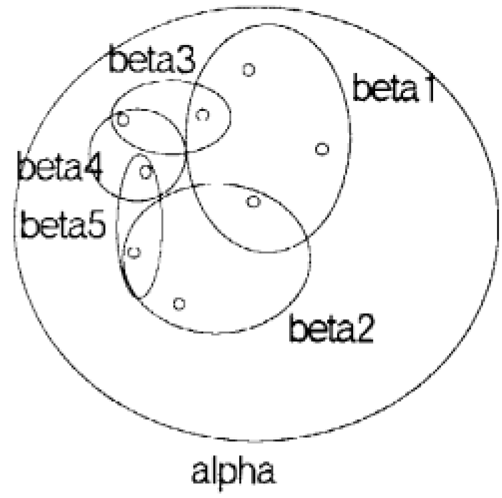

図6. 一般化されたネットワーク

7 積和ユニット

この一般化された相互結合は積和ユニット (シグマパイユニット) の相互結合と見なすことができる。積和ユニットの入力は他のユニットの出力の積の重みづけされた和である。式で書くと

$$x_i = f(\sum_{i\in\beta} w_\beta \prod_{k\in\beta-\{i\}} x_k - \theta_i) \tag{24}$$

$\sum_{i\in\beta}$ は i を含むような β について和を取る。$\prod_{k\in\beta-\{i\}}$ は β から i を除いた k について積を取る。

8 対応の価値

Johnson は充足可能性判定のみを論じた。しかし論理式 - コネクショニストモデル対応は解法としてだけで扱うべきではない。相互結合型ネットワークを設計する際の新しい記述のレベルが与えられたと言える。また論理式のもう一つの表現を得たとも言える。

9 まとめ

Johnson の研究をすこし一般化し、より機械的にネットワークを構成できるようにした。また、論理式 - コネクショニストモデル対応は充足可能性判定問題を解くためだけに重要なのではないことを述べた。

10 参考文献

[1] Johnson,J.L.: A Neural Network Approach to the 3-Satisfiability Problem, Journal of parallel and distributed computing 6 (1989).

[2] Rumelhart,D.E.,McCleland,J.L.and the PDP Research Group : Parallel Distributed Processing Exploration in the Microstructure of Cognition, MIT Press(1986) (甘利俊一監訳: PDP モデル: 認知科学とニューロン回路網の探索, 産業図書,1989)

[3] Chang,C.L.,Lee,R.C.: Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving, Academic Press(1973) (長尾真、辻井潤一: コンピュータによる定理証明, 日本コンピュータ協会,1983)