TR-570

矛盾を契機とする非単調推論の
確率的意味について

佐藤　健

July, 1990

©1990, ICOT

ICOT

Mita Kokusai Bldg. 21F
4-28 Mita 1-Chome
Minato-ku Tokyo 108 Japan

(03) 456-3191～5
Telex ICOT J32964

Institute for New Generation Computer Technology

矛盾を契機とする非単調推論の確率的意味について

A Probabilistic Interpretation for Lazy Nonmonotonic Reasoning

佐藤 健

Ken Satoh

(財) 新世代コンピュータ技術開発機構

Institute for New Generation Computer Technology

Abstract

This paper presents a formal relationship for probability theory and a class of nonmonotonic reasoning which we call *lazy nonmonotonic reasoning*. In lazy nonmonotonic reasoning, nonmonotonicity emerges only when new added knowledge is contradictory to the previous belief.

In this paper, we consider nonmonotonic reasoning in terms of *consequence relation*. A consequence relation is a binary relation over formulas which expresses that a formula is derivable from another formula under inference rules of a considered system. A consequence relation which has lazy nonmonotonicity is called a *rational consequence relation* studied by Lehmann and Magidor [9].

We provide a probabilistic semantics which characterizes a rational consequence relation exactly. Then, we show a relationship between propositional circumscription and consequence relation, and apply this semantics to a consequence relation defined by propositional circumscription which has lazy nonmonotonicity.

1　はじめに

非単調推論 [1] は不完全な知識下における人間の推論の定式化を目的としている. 不完全な知識の補完の一つの方法は常識を用いることである. 常識は普通よく成り立つ情報であるので, 常識を用いればたいていの状況で正しい決定をすることができる. つまり, 常識はある種の統計的または確率的な性格を持つと考えられる. このような考え方から最近, 確率に基づいて非単調推論の意味を考えようとする研究が多くなされている [14, 15]. しかし, 極小限定 [12] や非単調論理 [2] のような非単調推論の論理的な定式化と確率による定式化との理論的な関係は Lifschitz [11] が指摘しているようにいまだ明らかになっていない.

本論文では非単調推論を**前提帰結関係** (*consequence relation*) [4, 7, 9, 8] としてとらえ, 前提帰結関係のあるクラスが確率的意味を持つことを示す. 前提帰結関係は, 論理式間の 2 項関係であり, 前者がある前提を表し後者がある論理の推論規則に基づいて得られる帰結を表す.

非単調推論の論理的定式化は以下のような前提帰結関係でとらえることができる. つまり, 前提は今わかっている知識の状態を表し, 帰結はそのときに信じている信念を表すと考える. たとえば, 極小限定では, 最初に与えられた公理を前提とし, ある述語を極小化した結果得られる定理を帰結として考えればよい. また, Default Logic [16] では, 公理を前提として考え Default 規則によって得られた推論結果を帰結として考えればよい.

非単調推論をこのような前提帰結関係でとらえることでその一般的な性質を研究することができる. Gabbay [4] は非単調推論の定義する前提帰結関係がどのような性質を満たすべきかをはじめて検討した. さらに, Kraus, Lehmann, Magidor [7] はその研究を推し進め**選好的前提帰結関係** (*preferential consequence relation*) という前提帰結関係のクラスに対してモデル論的な意味を与えた. この意味論は, 可能状態間の半順序に基づいており, 極小限定や Shoham の Preference Logic [18] のモデル論と非常に似ている.

また, Lehmann, Magidor [9] は, **合理的前提帰結関係** (*rational consequence relation*) と呼ばれる, より制限された前提帰結関係のクラスに対してモデル論的な意味を与えた. 合理的前提帰結関係においては, ある知識から得られた信念は, その信念に矛盾しない知識が付け加わらない限り保持される. つまり, 非単調性が現れるのは, 現在保持している信念に矛盾する知識が付け加わるときである. そういう意味でこの性質を持つ推論は必要最低限の非単調性を持つ (*lazy nonmonotonic*) といえる. この合理的前提帰結関係の意味論は**ランク付けされたモデル** (*ranked model*) と呼ばれるモデルに基づいている. ランク付けされたモデルでは, 可能状態の順序が階層構造をなすのが特徴である.

さらに, 彼らは, 非単調推論においてある前提帰結の組の集合が与えられたときにそこからどんな前提帰結の組が含意されるかを研究した. 前提帰結の組の集合とそこから導かれる前提帰結の組の関係を**合理的限定含意** (*rational entailment*) と呼ぶ. そして, 彼らは, 合理的限定含意と Adams の Conditonal Logic [3] の関係を示した. この論理は, ε-semantics [14] と呼ばれる確率に基づく非単調推論の基礎理論である. つまり, 合理的限定含意には, 確率に基づく非単調推論の定式化との関係が存在する.

しかしながら, 論理に基づく非単調推論の定式化に対して確率的な意味を与えるには合理的限定含意に対する確率的意味ではなく, 前提帰結関係そのものに対して確率的な意味を与える必要がある. なぜなら, 上で述べたように論理に基づく非単調推論の定式化は前提帰結関係を定義しているからである.

本論文では, 論理的定式化と確率的定式化の関係付けの第一歩として, 合理的前提帰結関係に対して確率的な意味を与える. ここでの確率的な意味は, 確率の極限に基づいている. 前提を表す論理式のもとでの帰結を表す論理式の条件付き確率をパラメータ x を持つ確率関数で表し x を 0 に近づけていったときの確率関数の極限が 1 のときかつそのときにかぎり, その論理式の組は前提帰結関係の中に入っているとする. この前提帰結関係を**確率の極限による前提帰結関係**と呼ぶ.

このように確率の極限による前提帰結関係を定義すると以下のことが示される. 前提帰結関係が合理的 (rational) であるときかつそのときにかぎり, あるパラメータ x を持つ確率関数が存在し, その確率関数の極限による前提帰結関係がその合理的前提帰結関係に一致する.

さらに, 本論文では, この結果を極小限定 [12] に対する確率的意味に応用する. 上で述べたように選好的前提帰結関係や合理的前提帰結関係は可能状態の順序に基づいた意味論を持っており, 極小限定は解釈の順序に基づいた意味論を持っている. この親和性により, 極小限定への応用が可能となる. しかし, 極小限定によって定義される前提帰結関係は選好的前提帰結関係ではあるが合理的前提帰結関係でない場合がある. とくに定義が変化できない述語がある場合や同時に 3 つ以上の述語を極小化する場合にはいつも合理的前提帰結関係ではない.

しかし, 解釈の順序がランク付けされているような極小限定のクラスでは, 上で述べたような確率関数を定義することができ, その確率関数の極限による前提帰結関係がその極小限定で定義される前提帰結関係と一致することを示す.

2 前提帰結関係とそのモデル

この章では, Lehmann, Kraus, Magidor [7, 9] の研究について概観する. よりくわしい議論に関しては [8] を参照されたい.

命題論理を L としたときに, L の論理式上の 2 項関係 $\mid\!\sim$ を前提帰結関係と呼ぶ. 非単調推論における前提帰結関係 $\mid\!\sim$ は, 直感的には, 次のような意味を持つ. すなわち, $A \mid\!\sim B$ のときには, A を今わかっている知識とすれば, 非単調推論の推論系を用いて A から導かれる信念が B となるということである.

定義 1 以下の 7 つの性質を満たす前提帰結関係を**合理的前提帰結関係** *(*rational consequence relation*)* と呼ぶ.

$A \equiv B$ が tautology かつ $A \mid\!\sim C$ のとき, $B \mid\!\sim C$. (1)

$A \supset B$ が tautology かつ $C \mid\!\sim A$ のとき, $C \mid\!\sim B$. (2)

$A \mid\!\sim A$. (3)

$A \mid\!\sim B$ かつ $A \mid\!\sim C$ のとき, $A \mid\!\sim B \wedge C$. (4)

$A \mid\!\sim C$ かつ $B \mid\!\sim C$ のとき, $A \vee B \mid\!\sim C$. (5)

$A \mid\!\sim B$ かつ $A \mid\!\sim C$ のとき, $A \wedge B \mid\!\sim C$. (6)

$A \mid\!\sim C$ かつ $A \not\mid\!\sim \neg B$ のとき, $A \wedge B \mid\!\sim C$. (7)

最初の 6 つの性質を持つ前提帰結関係を**選好的前提帰結関係** (*preferential consequence relation*) と呼ぶ.

性質 (7) は**合理的単調性** (*rational monotony*) と呼ばれており Gärdenfors [5] が提案した極小翻意の条件の一つに対応している. 直感的にいえば, 合理的単調性は, 以下のようになる. つまり, 以前の信念は新しく付け加わる知識に矛盾しない限り新しい信念の中に含まれるということである.

合理的前提帰結関係の意味は**ランク付けされたモデル** (*ranked model*) と呼ばれるモデルで与えられている [9]. このモデルは, 下で定義する**選好的モデル** (*preferential model*) と呼ばれる選好的前提帰結関係 [7] のモデルを制限したものである.

定義 2 **選好的モデル** W は 3 つ組 $\langle S, l, \prec \rangle$ である. ただし, S は集合であり S の要素は状態 *(state)* と呼ばれる. また, l は各状態に対して論理的解釈を割り当てる関数であり, $\prec$ は S 上の厳密半順序 *(*非反射的かつ推移的関係*)* であり以下の条件 *(smoothness condition)* を満たす*:* すべての L の論理式とすべての状態 $t \in \widehat{A}(\stackrel{\mathrm{def}}{=} \{s | s \in S, l(s) \models A\})$ に対して, t が $\widehat{A}$ の極小の要素か, ある s が $s \prec t$ かつ $\widehat{A}$ の極小の要素である.

定義 3 **ランク付けされたモデル** W は *preferential model* $\langle S, l, \prec \rangle$ である. ただし, $\prec$ は以下の条件を満たす*:* すべての S の要素 s, t, u に対して $s \prec t$ のとき $s \prec u$ または $u \prec t$ である.

この定義は Lehmann, Magidor の定義とは異なるが同値である. ランク付けされたモデルでは, 状態の集合は以下のような階層に分けることができる. すなわち, もし $s \prec t$ ならば, s と t は違うランクに属し, $\neg(s \prec t)$ かつ $\neg(t \prec s)$ ならば s と t は同じランクに属するような階層に分けられる.
上のモデルによる前提帰結関係を以下のように定義する.

定義 4 W を選好的 *(*または ランク付けされた*)* モデル $\langle S, l, \prec \rangle$ とし A, B を L の論理式とする. W による前提帰結関係 $\mid\!\sim_W$ を以下のように定義する. $\widehat{A}$ のすべての極小の要素 s に対して $l(s) \models B$ のとき $A \mid\!\sim_W B$.

Kraus, Lehmann, Magidor [7] は前提帰結関係が選好的のときかつそのときにかぎりある選好的モデルが存在して, その選好的前提帰結関係とそのモデルによる前提帰結関係が一致することを示し, Lehmann, Magidor [9] は前提帰結関係が合理的のときかつそのときにかぎりあるランク付けされたモデルが存在して, その合理的前提帰結関係とそのモデルによる前提帰結関係が一致することを示した.

3 合理的前提帰結関係に対する確率的意味

以下では, L の命題シンボルは有限であるとする.

定義 5 L を命題論理とする. 正のパラメータ x を持つ L 上の確率関数 P_x は, L の論理式と正の実数から正の実数への関数であり以下の条件を満たす.

1. すべての L の論理式 A とすべての正の実数 x に対して, $0 \leq P_x(A) \leq 1$.
2. すべての正の実数 x に対して, $P_x(\mathbf{T}) = 1$.
3. すべての L の論理式 A, B とすべての正の実数 x に対して, $A \wedge B$ が恒偽のとき, $P_x(A \vee B) = P_x(A) + P_x(B)$.

パラメータ x を無視すれば, 上の定義は命題論理上の確率関数の標準的な定義となる [5, p. 37]. パラメータ x は前提帰結関係のモデルの各状態の重みを表現するために導入している. Spohn [19] は彼の Natural Conditional Functions を確率論と関係付けるために同じような確率関数を用いている.

定義 6 A, B を L の論理式とする. A のもとでの B の条件付き確率 $P_x(B|A)$ を以下のように定義する.

$$P_x(B|A) = \begin{cases} 1 & if\ P_x(A) = 0 \\ \dfrac{P_x(A \wedge B)}{P_x(A)} & otherwise \end{cases}$$

定義 7 正のパラメータ x を持つ L 上の確率関数 P_x が**収束する**とは以下の条件が満たされるときである: すべての L の論理式 A に対してある実数 α が存在して

$$\lim_{x \to 0} P_x(A) = \alpha.$$

となる.

さて, 上の確率関数を用いた前提帰結関係を定義する.

定義 8 **確率の極限による前提帰結関係** $\mid\!\sim$ とは以下の条件を満たす前提帰結関係である. 正のパラメータ x を持つ収束確率関数 P_x が存在し, すべての L の論理式 A, B に対して

$$A \mid\!\sim B\ if\ and\ only\ if\ \lim_{x \to 0} P_x(B|A) = 1.$$

となる.

直感的にいえば, 論理式の組が $\langle A, B \rangle$ が確率の極限による前提帰結関係の中に入っているときには, A のもとでの B の条件付き確率を好きなだけ 1 に近付けることができるが, 入っていないときには, 1 に近付けることができず 1 ではない値に近付くということである.

以下の定理は, 確率の極限による前提帰結関係と合理的前提帰結関係との関係を示している.

定理 1 $\mid\!\sim$ が確率の極限による前提帰結関係であるときかつそのときにかぎり $\mid\!\sim$ は *rational* となる. [1].

証明:

(1) $\mid\!\sim$ が確率の極限による前提帰結関係であるときには合理的前提帰結関係の 7 つの性質を満たすことを容易に示すことができる.

(2) $\mid\!\sim$ が合理的である (rational) とする. すると, Lehmann, Magidor の結果により, あるランク付けされたモデル $W = \langle S, l, \prec \rangle$ が存在しすべての論理式 A, B に対して $A \mid\!\sim B$ のときかつそのときにかぎり $A \mid\!\sim_W B$ となる. 言語が論理的に有限であるのでそのようなランク付けされたモデルのなかには有限のものがある. したがってランクの数も有限となる. これを

[1] 似た結果が独立に, Morris, Pearl, Goldszmidt らと Lehmann, Magidor らによって得られている.

$n(n \geq 1)$ とする．そして η_i を第 i 番目ランクにおける状態の数とする．($\prec$ の順序において大きい方の状態が高いランクを持っているとする)．

正のパラメータ x を持つ確率関数を次のように定義する: [2]

$$P_x(A) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n} \eta_i^A * x^{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} \eta_i * x^{i-1}}$$

ここで η_i^A は第 i 番目ランクにおける状態で A を満たすものの数とする．

すると，P_x は収束し以下の確率の極限による前提帰結関係 $|\!\sim'$ が $|\!\sim_W$ と一致する．

$$A|\!\sim' B \text{ if and only if } \lim_{x \to 0} P_x(B|A) = 1$$

□

4 極小限定の確率的意味

この論文での極小限定の定義は以下を用いる．これは，一般化された極小限定 [10] を少し変更したものになっている．

定義 9 A を L の論理式とし $\mathbf{P}$ を命題定数の組とし，$\mathbf{p}$ を命題変数の組とする．$Circum(A; <^{\mathbf{P}})$ を以下のように定義する．

$$Circum(A; <^{\mathbf{P}}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} A(\mathbf{P}) \wedge \neg \exists \mathbf{p}(A(\mathbf{p}) \wedge \mathbf{p} <^{\mathbf{P}} \mathbf{P}),$$

ここで，$A(\mathbf{p})$ は，$A(\mathbf{P})$ の中の $\mathbf{P}$ に含まれるすべての命題定数を $\mathbf{p}$ の対応する命題変数に置き換えたものであり，$<^{\mathbf{P}}$ は，論理式間の *2* 項関係であり以下の条件を満たす．

1. すべての命題定数の組 $\mathbf{P}$ に対して $\neg\mathbf{P} <^{\mathbf{P}} \mathbf{P}$

2. すべての命題定数の組 $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ に対して $\mathbf{P} <^{\mathbf{P}} \mathbf{Q}$ かつ $\mathbf{Q} <^{\mathbf{P}} \mathbf{R}$ ならば $\mathbf{P} <^{\mathbf{P}} \mathbf{R}$

すると，極小限定による前提帰結関係 $|\!\sim_{<^{\mathbf{P}}}$ は以下のように定義される．

$$A|\!\sim_{<^{\mathbf{P}}} B \text{ if and only if } Circum(A; <^{\mathbf{P}}) \models B.$$

上の極小限定の意味は，以下のような解釈の厳密半順序に基づく．I_1, I_2 を L の論理的解釈とする．$I_1 <^{\mathbf{P}} I_2$ とは，$\mathbf{P}$ の中にないすべての命題定数 P に対して，$I_1[P] = I_2[P]$ でありかつ $\mathbf{P} <^{\mathbf{P}} \mathbf{Q}$ の $\mathbf{P}$ の中にある P を $I_1[P]$ に置き換え，$\mathbf{Q}$ の中にある P を $I_2[P]$ に置き換えたときに真となることである．

すると，極小限定による前提帰結関係に対して以下のような選好的モデル $W = \langle S, l, \prec \rangle$ を考えることができる．すなわち，論理的解釈を S とし，l を恒等関数とし，$\prec$ を上で定義した解釈の上の厳密半順序とするのである．Kraus, Lehmann, Magidor [7] が指摘しているように，S が有限なら $\prec$ の smoothness condition はいつでも満足されるのでこの W は選好的モデルの条件をすべて満たしている．この選好的モデルを $<^{\mathbf{P}}$ で定義されたモデルと呼ぶ．したがって，Kraus, Lehmann, Magidor [7] の結果より極小限定による前提帰結関係は選好的前提帰結関係となる．

しかしながら，以下の定理が示すように極小限定による前提帰結関係はいつも合理的前提帰結関係であるというわけではない．

定理 2

1. 命題定数の組 $\mathbf{P}$ が L のすべての命題定数を含んでおらず，$<^{\mathbf{P}}$ がある解釈 I, J に対して $J <^{\mathbf{P}} I$ となっているときには，$<^{\mathbf{P}}$ の順序によって定義された極小限定による前提帰結関係はいつも合理的前提帰結関係ではない．

[2] この関数は [9] で別な定理の証明で用いられている

2. 命題定数の組 $\mathbf{P}$ が L のすべての命題定数を含んでおり，3 つ以上の命題を極小化するような極小限定による前提帰結関係はいつも合理的前提帰結関係ではない．

証明は [17] を参照されたい．

合理的前提帰結関係の性質，合理的単調性 (rational monotony) は Gärdenfors [5] が提案した信念の極小変化に対する基本条件の一つであるので非単調推論には重要な性質と思われるが，常識推論ではそれを持たないものもある．例えば以下の公理を考えてみる[3]．

$A_1 \stackrel{\text{def}}{=}$

$((Japanese \wedge \neg Ab1) \supset \neg Big)\wedge$

$((Hockey\_player \wedge \neg Ab2) \supset Strong)\wedge$

$((Professor \wedge \neg Ab3) \supset \neg Strong)\wedge$

$(Strong \supset Big)\wedge$

$Japanese \wedge Hockey\_player \wedge Professor.$

(もし人が日本人であれば，普通大きくない．もし人がホッケー選手であれば，普通強い．もし人が教授であれば，普通強くない．もし人が強ければ，大きい．ある人がホッケー選手かつ日本人の教授である．)

ここで，$Ab1, Ab2, Ab3$ を同時に極小化し他の命題の定義を可変とする極小限定による前提帰結関係を考える．すると以下が成り立つ．

$$A_1 \mid\!\sim (\neg Big \wedge \neg Strong) \vee (Big \wedge Strong),$$

かつ

$$A_1 \not\mid\!\sim \neg Big.$$

であるが

$$A_1 \wedge Big \not\mid\!\sim (\neg Big \wedge \neg Strong) \vee (Big \wedge Strong).$$

すなわちこの前提帰結関係は合理的単調性が成り立たないので合理的前提帰結関係ではない．また別な例としては，**閉世界仮説** (*closed world assumption*) がある．この場合にはすべての命題を極小化するので，もし L の命題定数が 3 つ以上であれば，そのときの前提帰結関係は，合理的前提帰結関係とはならない．ただし，**優先度付き極小限定** (*Prioritized Circumscription*) の場合には 3 つ以上の命題定数を極小化しても合理的前提帰結関係となる場合があることに注意されたい．たとえば，上の日本人の教授の例では，$Ab1$ を $Ab2, Ab3$ よりも優先的に極小化した場合には，その前提帰結関係は合理的前提帰結関係となる．

さて，以下では，合理的前提帰結関係となるような極小限定に対して確率的意味を与える

定義 10 $<^{\mathbf{P}}$ **がランク付けされている**とは $<^{\mathbf{P}}$ で定義された選好的モデルがランク付けされていることをいう．

$<^{\mathbf{P}}$ がランク付けされていれば，$<^{\mathbf{P}}$ で定義される極小限定による前提帰結関係に対してそれと同値な前提帰結関係を表す確率関数を与えることができる．

例 1 *(2 つの命題を極小化する極小限定)*

命題の集合を $\{P, Q\}$ とする．すると解釈は以下の 4 つとなる:

$$\{\langle \neg P, \neg Q\rangle, \langle P, \neg Q\rangle, \langle \neg P, Q\rangle, \langle P, Q\rangle\}.$$

このとき P, Q を同時に極小化してみる．この極小化による厳密半順序関係を $<^{\langle P,Q\rangle}$ と表せば，$<^{\langle P,Q\rangle}$ による前提帰結関係 $\mid\!\sim_{<^{\langle P,Q\rangle}}$ は以下のように定義される:

[3]本例は David Poole によって示唆された

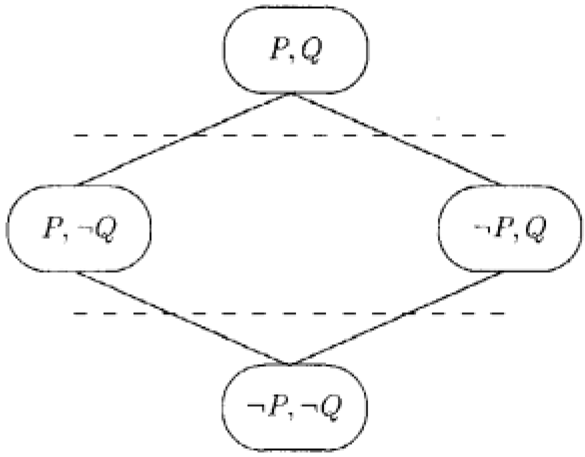

Figure 1: Partial Order by Minimizing P and Q.

$A(P,Q) \mid\!\sim_{<^{(P,Q)}} B(P,Q)$ if and only if

$$A(P,Q) \wedge \neg \exists p \exists q (A(p,q) \wedge ((p,q) < (P,Q))) \models B(P,Q),$$

ここで $(p,q) < (P,Q)$ は以下の略である:

$$(p,q) < (P,Q) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (p \supset P) \wedge (q \supset Q) \wedge \neg((P \supset p) \wedge (Q \supset q)).$$

$<^{(P,Q)}$ によって定義される選好的モデルはランク付けされている (図 1). 図は, 下の方の解釈が上の方の解釈よりも好ましいことを表している. 極小限定の確率的意味ではこの順序を各解釈の確率の大小と考える. つまり, 下の方の解釈が上の方の解釈よりも起こりやすいと考えるのである.

さらに, 第 $i+1$ 番目のランクに属する解釈に対する確率関数を第 i 番目のランクに属する解釈の確率関数の x 倍になるようにする. こうすることにより, x が 0 に近付くにつれて起こりにくい解釈は無視される. この例では次のような確率関数を各解釈に与える.

$$P_x(\langle \neg P, \neg Q \rangle) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{1+2x+x^2}$$
$$P_x(\langle P, \neg Q \rangle) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{x}{1+2x+x^2}$$
$$P_x(\langle \neg P, Q \rangle) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{x}{1+2x+x^2}$$
$$P_x(\langle P, Q \rangle) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{x^2}{1+2x+x^2}$$

すると論理式 A の確率は以下のように A を真とする解釈の確率関数の和として定義される.

$$P_x(A) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{I \models A} P_x(I)$$

さて, 前提帰結関係 $\mid\!\sim$ を以下のように関数の極限で定義する.

$$A \mid\!\sim B \text{ if and only if } \lim_{x \to 0} P_x(B|A) = 1$$

直感的には, x を 0 に近付けることは A を真とする一番起こりやすい解釈を考慮することに対応し $P_x(B|A)$ がそれについて 1 に近付くということは A を満たす一番起こりやすい解釈において B が非常に起こりやすいことを表している. これが, 合理的前提帰結関係となる極小限定の直感的な確率的意味である.

さて，$P \vee Q \mid\!\sim \neg P \vee \neg Q$ かどうかを調べてみる．$\langle P, \neg Q \rangle$, $\langle \neg P, Q \rangle$, $\langle P, Q \rangle$ が $P \vee Q$ を真とするので

$$P_x(P \vee Q) = P_x(\langle P, \neg Q \rangle) + P_x(\langle \neg P, Q \rangle) + P_x(\langle P, Q \rangle) = \frac{2x + x^2}{1 + 2x + x^2}$$

となる．同様に $P_x((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)) = \dfrac{2x}{1 + 2x + x^2}$

であるので，

$$\lim_{x \to 0} P_x(\neg P \vee \neg Q | P \vee Q) = \lim_{x \to 0} \frac{P_x((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q))}{P_x(P \vee Q)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{2x + x^2} = 1$$

したがって，$P \vee Q \mid\!\sim \neg P \vee \neg Q$ が成り立つ．これは，$P \vee Q$ を真とするすべての一番起こりやすい解釈において $\neg P \vee \neg Q$ が非常に起こりやすいことを表している．これは $P \vee Q \mid\!\sim_{<\langle P,Q \rangle} \neg P \vee \neg Q$ であることに一致する．

また，$P \vee Q \mid\!\sim P \wedge \neg Q$ に関して調べてみる．

$$\lim_{x \to 0} P_x(P \wedge \neg Q | P \vee Q) = \lim_{x \to 0} \frac{P_x((P \vee Q) \wedge (P \wedge \neg Q))}{P_x(P \vee Q)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2x + x^2} \neq 1$$

したがって，$P \vee Q \not\mid\!\sim P \wedge \neg Q$ となる．これは，$P \vee Q \not\mid\!\sim_{<\langle P,Q \rangle} P \wedge \neg Q$ であることに一致する．同様にしてすべての L の論理式 A, B に対して $A \mid\!\sim B$ のときかつそのときにかぎり $A \mid\!\sim_{<\langle P,Q \rangle} B$ であることを示すことができる．

例 2 *(鳥とペンギンの例)*

命題の集合を $\{B, P, F\}$ とする．B は「鳥である」ことを表し，P は「ペンギンである」ことを表し，F は「飛ぶ」ことを表す．そして，以下のような極小限定 $Circum(A, <^{\langle B,P,F \rangle})$ を考える．$A(B,P,F) \wedge \neg \exists b \exists p \exists f (A(b,p,f) \wedge (b,p,f) < (B,P,F)) \models B(B,P,F)$,

ここで $(b,p,f) < (B,P,F)$ は以下の略である:

$$\begin{aligned}
&(b,p,f) < (B,P,F) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \\
&\quad ((P \supset \neg F) \supset (p \supset \neg f)) \wedge \\
&\quad (((P \supset \neg F) \equiv (p \supset \neg f)) \supset ((B \supset F) \supset (b \supset f))) \wedge \\
&\quad \neg(((p \supset \neg f) \supset (P \supset \neg F)) \wedge \\
&\quad\quad (((p \supset \neg f) \equiv (P \supset \neg F)) \supset ((b \supset f) \supset (B \supset F)))).
\end{aligned}$$

この極小限定の意味はまず $P \supset \neg F$ をできるだけ真とする解釈の方が起こりやすいと考え，もし 2 つの解釈が両方とも $P \supset \neg F$ を真とするか両方とも偽とする場合には $B \supset F$ をできるだけ真とする解釈の方が起こりやすいと考えるということである．こうすることにより，ペンギンであるものは飛べないと信じることになり，ペンギンであるかどうかわからない鳥は飛べると信じることになる．すると，この極小限定による前提帰結関係 $\mid\!\sim_{<\langle B,P,F \rangle}$ は以下のようになる．

$A(B,P,F) \mid\!\sim_{<\langle B,P,F \rangle} B(B,P,F)$ if and only if

$$Circum(A(B,P,F), <^{\langle B,P,F \rangle}) \models B(B,P,F)$$

すると，$<^{\langle B,P,F \rangle}$ で定義される選好的モデルはランク付けされているので (図 2)，この前提帰結関係は合理的前提帰結関係となる．したがって前の例と同様に確率関数が定義される．

さて，前提帰結関係 $\mid\!\sim$ を以下のように確率の極限で定義する．

$$A \mid\!\sim B \ \text{ if and only if } \ \lim_{x \to 0} P_x(B|A) = 1$$

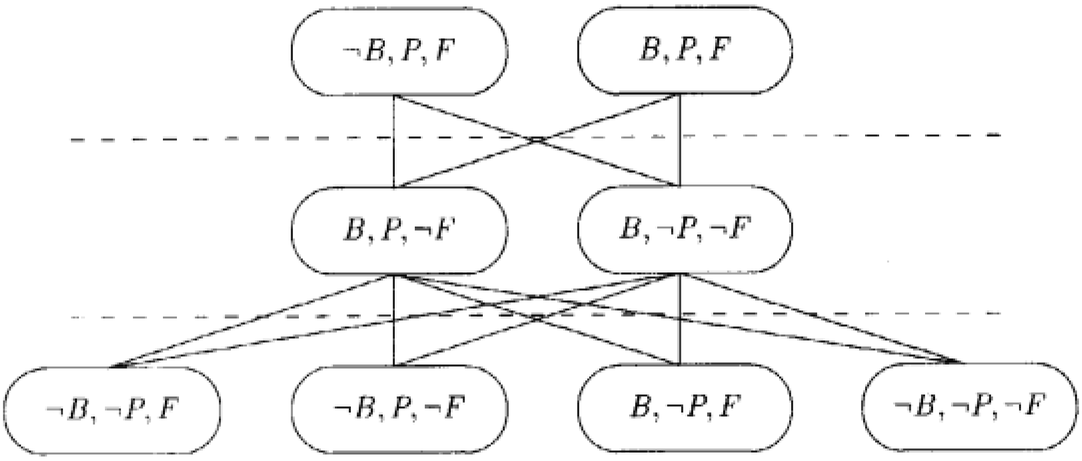

Figure 2: Strict Partial Order for Flying Bird and Non-flying Penguin.

さて，$B \wedge (P \supset B) \mid\!\sim F$ かどうか調べてみる．

$$\lim_{x \to 0} P_x(F | B \wedge (P \supset B)) = \lim_{x \to 0} \frac{P_x(B \wedge F)}{P_x(B)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + x^2}{1 + 2x + x^2} = 1.$$

したがって $B \wedge (P \supset B) \mid\!\sim F$ となる．これは，$B \wedge (P \supset B) \mid\!\sim_{<(B,P,F)} F$ に一致している．

また，$P \wedge (P \supset B) \mid\!\sim \neg F$ かどうか調べてみる．

$$\lim_{x \to 0} P_x(\neg F | P \wedge (P \supset B)) = \lim_{x \to 0} \frac{P_x(P \wedge B \wedge \neg F)}{P_x(P \wedge B)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x + x^2} = 1.$$

したがって，$P \wedge (P \supset B) \mid\!\sim \neg F$ となる．これは，$P \wedge (P \supset B) \mid\!\sim_{<(B,P,F)} \neg F$ に一致している．同様にしてすべての L の論理式 A, B に対して $A \mid\!\sim B$ のときかつそのときにかぎり $A \mid\!\sim_{<(B,P,F)} B$ であることを示すことができる．

5 おわりに

本論文では，矛盾を契機とする非単調推論に対して確率の極限による意味を与え，その結果を用いて，極小限定の部分クラスに対する確率的意味を与えた．

今後の課題としては以下がある．

1. 極小限定すべてのクラスに対する確率的意味を考える．極小限定による前提帰結関係は選好的前提帰結関係であるので，このクラスの前提帰結関係に確率的意味を与えればよい．

2. デフォルト論理 [16] や自己認識論理 [13] に対して確率的意味を与えるのはさらにむづかしい．なぜなら，これらの論理による前提帰結関係は一般には選好的前提帰結関係ですらないからである．したがって，まずこれらの論理における前提帰結関係の性質を明らかにし，そこでの確率的意味を明らかにしなければならない．

謝辞

この論文に対して貴重なコメントを頂いた，Kurt Konolige, Moises Goldszmidt, Johan van Benthem, David Poole 各氏に感謝します．また，この論文の定義 6の誤りを指摘していただいた Daniel Lehmann 氏に特別に感謝いたします．

References

[1] 渕 一博監修, 古川 康一, 溝口 文雄 共編: 知識プログラミング, 第8章 非単調推論, pp. 189–214, 共立出版 (1988).

[2] 松本 裕治, 佐藤 健: 非単調論理と常識推論, 情報処理, Vol. 30, No. 6, pp.674 – 683 (1989).

[3] Adams, E.: The Logic of Conditionals, D. Reidel, Dordrecht (1975).

[4] Gabbay, D.: Theoretical Foundations for Non-monotonic Reasoning in Expert Systems, *Logics and Models of Concurrent Systems*, K. R. Apt ed., Springer-Verlag, pp. 439 – 457 (1985).

[5] Gärdenfors, P.: Knowledge in Flux: Modeling the Dynamics of Epistemic States, MIT Press, (1988).

[6] Katsuno, H., and Mendelzon, A. O.: Propositional Knowledge Base Revision and Minimal Change, Dept. of Computer Science, University of Toronto, Canada, Technical Report, KRR-TR-90-3 (1990).

[7] Kraus, S. Lehmann, D. and Magidor, M.: Preferential Models and Cumulative Logic, Dept. of Computer Science, Hebrew University, Jerusalem, Israel, Technical Report, #TR-88-15 (1988).

[8] Lehmann, D.: What Does a Conditional Knowledge Base Entail?, *Proc. of KR-89*, pp. 212 – 222 (1989).

[9] Lehmann, D. and Magidor, M.: Rational Logics and Their Models: a Study in Cumulative Logics, Dept. of Computer Science, Hebrew University, Jerusalem, Israel, Technical Report, #TR-88-16 (1988).

[10] Lifschitz, V.: Some Results on Circumscription, *Proc. of Nonmonotonic Reasoning Workshop*, pp. 151 – 164 (1984).

[11] Lifschitz, V.: Open Problems on the Border of Logic and AI, *Unpublished Manuscript* (1989).

[12] McCarthy, J.: Circumscription – a Form of Non-monotonic Reasoning, *Artificial Intelligence*, Vol. 13, pp. 27 – 39 (1980).

[13] Moore, R. C.: Semantical Considerations on Nonmonotonic Logic, *Artificial Intelligence*, Vol. 25, pp. 75 – 94 (1985).

[14] Pearl, J.: Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference, Morgan Kaufmann (1988).

[15] Pearl, J.: Probabilistic Semantics for Nonmonotonic Reasoning: A Survey, *Proc. of KR-89*, pp. 505 – 516 (1989).

[16] Reiter, R.: A Logic for Default Reasoning, *Artificial Intelligence*, Vol. 13, pp. 81 – 132 (1980).

[17] Satoh, K.: A Probabilistic Interpretation for Lazy Nonmonotonic Reasoning, ICOT, Japan, ICOT Technical Report, TR–525 (1989).

[18] Shoham, Y.: Reasoning about Change: Time and Causation from the Standpoint of Artificial Intelligence, MIT Press (1988).

[19] Spohn, W.: A General Non-Probabilistic Theory of Inductive Reasoning, *Proc. of 4th AAAI Workshop on Uncertainty in AI*, pp. 315 – 322 (1988).