ICOT Technical Report: TR-502

TR-502

解釈の順序による柔らかい制約の定式化

佐藤 健

September, 1989

ICOT

Mita Kokusai Bldg. 21F
4-28 Mita 1-Chome
Minato-ku Tokyo 108 Japan

(03) 456-3191～5
Telex ICOT J32964

Institute for New Generation Computer Technology

解釈の順序による柔らかい制約の定式化

Formalizing Soft Constraints by Interpretation Ordering

佐藤 健
(財) 新世代コンピュータ技術開発機構

Ken SATOH
Institute for New Generation Computer Technology

平成元年8月30日
Revised: 平成2年5月16日

概要

エキスパートシステムにおける合成型問題では, 必ず満たされなければならない制約 (固い制約) のほかに「できるだけ・・・して欲しい」というような解に対する好みを表す制約 (柔らかい制約) が存在する. このような制約は, 固い制約を満たす解の選択条件を与えていると見ることができる. 本論文は, 極小限定 (Circumscription) の一般形である解釈の順序に基づく非単調推論の枠組でこの柔らかい制約を論理的に定式化する試みである. 固い制約を一階述語論理式で表すと, 固い制約を満たす解は, その論理式を満たす論理的解釈となる. すると, 柔らかい制約はその解釈の順序付けを与えていると考えられる. さて, 極小限定のモデル論では一階述語論理の解釈間に極小化したい述語の外延の包含関係に基づいた順序が定義されているが, この枠組では「できるだけある値を大きくして欲しい」というような柔らかい制約に対応する順序を表すには不十分であった. 本論文では, 一般的な解釈の順序を表すことのできるメタ言語を定義し, そのメタ言語と固い制約を組み合わせることで望ましい解の二階述語論理による形式的定義を与える. さらに, 命題論理または, 有限ドメイン上の一階述語論理においてモデル論に基づいた証明法を示す. 非単調推論の本来の目的は, 知識が不完全な場合の知識の補足の定式化であったが, 本論文は, 合成型問題における解の順序付けという新しい視点を与えている

1 はじめに

エキスパートシステムにおけるスケジューリングや設計などの合成型問題は, 一定の制約 (constraints) のもとで与えられた要求を満足する最適 (または妥当) なシステム構成を生成する問題である [1]. このような制約にはいろいろな種類がある. たとえば, Job Shop Scheduling を解くシステム ISIS [2] を作った Mark S. Fox らは一般のスケジューリング問題には, 以下のような制約があると述べている [3].

1. スケジューリングの束縛条件 (Scheduling Restriction):
スケジュールを作る時の探索空間を規定する. このような制約には以下のようなものがある.
(a) 因果的制約 (Causal Restrictions):
操作の順番を規定したり, 操作の間に許される時間, その操作に必要な資源の要求等がこの制約に含まれる.
(b) 物理的制約 (Physical Constraints):
機械の機能的な限界を定義する.

(c) 資源の利用不可能制約 (Resource Unavailability):

機械が故障して使えなくなったりする動的な制約のことである.

2. スケジューリングの優先条件 (Scheduling Preferences):

複数の可能なスケジュールに優先順位を付けるための基礎を与える. このような制約には以下のようなものがある.

(a) 組織の目標 (Organizational Goals):

機械の稼働時間を抑えたり, 資源を最大限に活用するというような制約であり, そのスケジュールを行う組織の利益を最大にすることが目標である.

(b) 操作的好み (Operational Preferences):

この制約は個々の操作, 資源などの候補の望ましい選択を表すものである.

(c) 資源の利用不可能制約 (Resource Unavailability):

ここでは, できるだけある機械を使わないようにするといったようなスケジュールする人の好みを表す制約である.

本論文では, 1 番目の制約のように必ず満たさなければならない制約を**固い制約**と呼び, これに対し固い制約を満たす解の選択基準を与えるような 2 番目の制約のことを**柔らかい制約**と呼ぶことにする. スケジューリングの分野では, 柔らかい制約が固い制約と同じように重要であるが, 柔らかい制約の重要度を含めた総合的な表現方法としては, 評価関数が用いられている [2, 4]. しかし, 一般に柔らかい制約に相当する専門家の知識が評価関数の形式になっていることはまれで, むしろナレッジエンジニアが専門家へのインタビューのさいに自然言語によって述べられた知識を得, それを評価関数の形に変換し, いろいろな例に対して適用して試行錯誤によって評価関数を修正していくケースの方が多いと考えられる. このようなアプローチでは, 得られた評価関数と専門家の知識との間のギャップが大きく, 専門家の知識が評価関数に正しく反映されているかの判断がたいへんむづかしい.

このような問題を解決する一つの方法は, 自然言語に近い形で専門家の知識をより直接に表現することにより, エキスパートシステム内の知識と専門家の知識との間のギャップを埋めることである. その点で論理的な表現は評価関数に比べるとより自然な表現であるので, 柔らかい制約を論理的に表現できれば上の問題を解決できると思われる. 本研究は, **極小限定** (Circumscription) [5, 6] を一般化した**解釈の順序による非単調推論**の枠組を用いて柔らかい制約を論理的に定式化する試みである.

基本的な考え方は以下のようである. 固い制約を一階述語論理式で表すことにする. すると, その論理式を満たす論理的解釈が固い制約を満たす解とみなすことができる. 柔らかい制約は解の望ましさの順序を与えるので, 論理的解釈の順序を定義できれば, 柔らかい制約を論理的に表現できたことになる.

さて, 極小限定のモデル論では一階述語論理の解釈間に, 極小化したい述語の外延の包含関係に基づいた順序が定義されている. しかし, ある値をできるだけ大きくするというような柔らかい制約を表すには不十分であるので, 我々は, 解釈間のより一般的な順序を記述できるメタ言語を定義して, より広いクラスの柔らかい制約を表現できるようにした.

論文の構成は以下のとおりである. まず第 2 章では, 柔らかい制約の性質について考察する. 第 3 章では, 解釈の順序を表すメタ言語の定義とそれに基づいた望ましい解の二階述語論理式による形式的定義について述べ, 第 4 章では, そのメタ言語を用いた柔らかい制約の表現例について述べる. 第 5 章では, モデル論に基づいた望ましい解の計算方法について述べる. 第 6 章では, 関連する研究との比較を行い, 最後に本定式化の意義および今後の課題について述べる.

2 柔らかい制約

この章では，柔らかい制約の性質について考察する．

たとえば，社長，副社長，専務の3人が会議をするとしたときの会議スケジュールの以下の条件を考えてみる．

1. 会議には**必ず**社長が出席しなければならない．
2. 専務は出席することが**望ましい**．
3. 副社長は出席することが**望ましい**．ただし，副社長の都合の方が専務の都合よりも**優先される**．

1番目の条件は絶対的な制約であり，満たされていなければならないが，2番目や3番目の条件は柔らかい制約であり，固い制約を満たす解の選択条件と見ることができる．つまり，この制約は固い制約を満たす複数の解があった時に，その柔らかい制約を満たしている解の方が選択されるということである．ただし，もしその柔らかい制約を満たす解がない場合にはこの制約は無視されるので必ずしも満たされる必要はない．

さらに2番目と3番目の条件を見てみると片方だけが満たされる場合がありうる．3番目のただし書きにより，2番目よりも3番目の条件が優先されることがわかる．このように固い制約にはなかった制約の優先度というものが柔らかい制約の場合にはありうる．

またこの例にはないが，解のある部分の値をできるだけ大きくしてほしいという制約も，その値が大きい解の方が優先されると考えれば解の選択条件を表しているといえるので柔らかい制約と見ることができる．

上をまとめると以下のような3種類の順序があることがわかる．ここで固い制約を満たす2つの解を σ, θ とし，σ, θ が満たす柔らかい制約の集合をそれぞれ C_σ, C_θ とする．

1. できるだけ満たしてほしい制約の間に優先度がない場合:
   この場合には，$C_\sigma \subset C_\theta$ [1]のときに θ の方が σ より望ましいことになる．この条件を満たさない場合には，どちらが望ましいかを決定できない．
2. できるだけ満たしてほしい制約の間に優先度がある場合:
   この場合には，C_σ, C_θ の間に包含関係がなくてもどちらの解がいいかを決められることがある．たとえば，1から k までの制約の優先度があったときに，1番目に優先される制約のうち σ, θ が満たす制約の集合をおのおの C_σ^1, C_θ^1，2番目に優先される制約のうち σ, θ が満たす制約の集合をおのおの $C_\sigma^2, C_\theta^2, \ldots,$ k 番目に優先される制約のうち σ, θ が満たす制約の集合をおのおの C_σ^k, C_θ^k とすると解の順序は以下のようになる．
   (a) $C_\sigma^1 \subset C_\theta^1$ のときに θ の方が σ より望ましい．
   (b) $i-1$ 番目まで $C_\sigma^{i-1} = C_\theta^{i-1}$ ならば，$C_\sigma^i \subset C_\theta^i$ のときに θ の方が σ より望ましい．
   この順序によれば，たとえ C_σ, C_θ に包含関係がなくても，分割された制約の集合に包含関係があればどちらが望ましいかを決定できる．
3. 解の一部の値の比較によって解の順序が決まる場合:
   解のある部分の値をできるだけ大きくするような場合にはその値の順序関係にしたがって一番望ましい解を求めれば良い．たとえば，σ, θ におけるその値が V_σ, V_θ であれば，$V_\sigma < V_\theta$ のときに θ の方が σ より望ましいことになる．

[1] $C_\sigma \subset C_\theta$ は C_σ が C_θ の真部分集合であることを表す．

さて，このような解の順序を与えたときに一番望ましい解の集合 S は以下のように表される．固い制約を満たす解の集合を S_0 とし，柔らかい制約によって与えられる上のような解の順序を $<$ と表し小さい方を望ましいとすれば，

$$\{\sigma|\sigma \in S_0 \text{かつ} \theta < \sigma \text{なる} \theta \in S_0 \text{は存在しない}\}.$$

これを述語論理で考えると以下のようになる．必ず成り立たなければならない固い制約は一階述語論理式で表された公理と見ることができる．すると，固い制約を満たす解はその論理式を満たす論理的解釈と見ることができる．柔らかい制約は解の順序を与えているので，この論理的解釈に対する順序を与えていると見ることができる．すると，一番望ましい解の集合は以下のように定義される．C を固い制約を表す一階述語論理式とし，M, M' を論理的解釈とし，$\prec$ を次の章で述べるメタ言語で表された解釈間の順序とし，小さい方を望ましいとすれば，

$$\{M|M \models C \text{かつ} M \text{と比較可能な解釈} M' \text{で} M' \models C \text{かつ} M' \prec M \text{なるものは存在しない}\}.$$

こうすると，上の式を満たす論理的解釈は，制約 C を満たす解釈の中で $\prec$ の順序で極小のものとなる．つまり $\prec$ に関する C の極小モデルが，一番望ましい解となる．

3　メタ言語による解釈の順序の表現

この章ではまず解釈の順序を表現するメタ言語の定義を述べ，そのメタ言語に基づいた二階述語論理式への変換について述べる．最後に，一階述語論理式で表された固い制約とメタ言語によって表された柔らかい制約から作られた二階述語論理式による望ましい解の形式的定義を示す．

3.1　準備

解釈の関係を定義する前に準備としていろいろな定義を行う．ここで用いる二階述語論理式は，変数として，個体変数だけでなく述語変数（ならびに命題変数）を含む言語である．以下では，両方の変数を総称して変数と呼ぶ．

二階述語論理の解釈 M とは，ドメインと呼ばれる空でない集合 D と以下のような写像からなる．

1. 個体定数 a には，D 上の元 $(a)^M$ を対応させる．ここで $(a)^M$ は，解釈の写像による a の像を表す．
2. n 引き数関数定数 f^n には D^n から D への関数 $(f^n)^M$ を対応させる．
3. n 引き数述語定数 P^n には D^n の部分集合 $(P^n)^M$ を対応させ，命題定数には $\mathbf{T}$ か $\mathbf{F}$ を対応させる．

D における変数への代入関数 ϕ を以下のように定義する．

1. 個体変数 x には，D 上の元 $\phi(x)$ を対応させる．
2. n 引き数述語変数 p^n には，D^n の部分集合 $\phi(p^n)$ を対応させ，命題変数には $\mathbf{T}$ か $\mathbf{F}$ を対応させる．

ϕ とたかだか変数 v の対応が異なっているような代入関数を ϕ_v と書き，$\phi_{v_1 \ldots v_{n-1}}$ とたかだか変数 v の対応が異なっているような代入関数を $\phi_{v_1 \ldots v_{n-1} v}$ と書く．また，D における代入関数の集合を Φ_D と表す．

M をドメイン D 上の解釈とし，ϕ を D 上の代入関数とする．すべての項 t に対して D の要素 $\phi^M(t)$ を対応させる関数 ϕ^M を以下のように定義する．

1. もし t が個体定数ならば，$\phi^M(t) = (t)^M$
2. もし t が個体変数ならば，$\phi^M(t) = \phi(t)$

3. もし t が $f^n(t_1,...,t_n)$ ならば, $\phi^M(t) = (f^n)^M(\phi^M(t_1),...,\phi^M(t_n))$

A を二階述語論理式としたとき,「ϕ が解釈 M において A を満たす」ということを以下のように定義し $M \models_\phi A$ と書く.

1. P^n を n 引き数述語定数とする. もし A が $P^n(t_1,...,t_n)$ ならば, $<\phi^M(t_1),...,\phi^M(t_n)> \in (P^n)^M$ のことであり, もし A が命題定数 P ならば, $(P)^M = \mathbf{T}$ のことである.
2. p^n を n 引き数述語変数とする. もし A が $p^n(t_1,...,t_n)$ ならば, $<\phi^M(t_1),...,\phi^M(t_n)> \in \phi(p^n)$ のことであり, もし A が命題変数 p ならば, $\phi(p) = \mathbf{T}$ のことである.
3. もし, A が $\neg B$ とすれば, $M \models_\phi B$ でないことである.
4. もし, A が $B \supset C$ とすれば, $M \models_\phi B$ でないかまたは, $M \models_\phi C$ のことである.
5. v を変数とする. A が $\forall v B$ とすれば, すべての $\phi_v \in \Phi_D$ に対して $M \models_{\phi_v} B$ のことである.

もしすべての $\phi \in \Phi_D$ に関して $M \models_\phi A$ ならば, $M \models A$ と書き, M を A のモデルと呼ぶ.

3.2 wdr(well-defined relation)

ここでは, 比較可能な解釈の間の関係を表すメタ言語を定義する.

M と M' を解釈とする. M と M' が述語定数の組 $\mathbf{P}$ に関して**比較可能である**とは, 以下の条件を満たすときである.

1. M も M' も同じドメイン上の解釈である.
2. すべての個体定数, 関数定数, $\mathbf{P}$ の中にない述語定数における写像は, M, M' 共に一致する.

定義 1 (wdr) M と M' をドメイン D 上の解釈とし, 述語定数の組 $\mathbf{P}$ に関して比較可能であるとする. ϕ を D 上の代入関数, v を変数とすれば, 次の条件を満たすものを **taf(top-level assignment function)** ϕ を持つ M と M' に関する **wdr(well-defined relation)** と呼ぶ.

1. もし A が二階述語論理式のとき $M \models_\phi A$, $M' \models_\phi A$ は *taf* ϕ を持つ *wdr* であり, それぞれ M, M' の**原子 wdr** と呼ぶ.
2. $\mathcal{A}$ が *taf* ϕ を持つ *wdr* ならば, $\neg\mathcal{A}$ は *taf* ϕ を持つ *wdr* である.
3. $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が *taf* ϕ を持つ *wdr* ならば, $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ は *taf* ϕ を持つ *wdr* である.
4. $\mathcal{A}$ が *taf* ϕ_v を持つ *wdr* ならば, $(\forall\phi_v \in \Phi_D)\mathcal{A}$ は *taf* ϕ を持つ *wdr* であり, **限量化された wdr** と呼ぶ.

taf ϕ を持つ M と M' に関する wdr を $\mathcal{R}(M, M')_\phi$ と書く.

上の二階述語論理の変数はメタなレベルでは文字列のような定数として扱われることに注意されたい. また, wdr では $\neg$ や $\supset$ のような記号を使っているがこれは, wdr におけるメタな論理記号であり, 二階述語論理上の記号ではないことに注意されたい. それらの記号は, 以下の日本文の略記法である.

1. $M \models_\phi A$ は,「M において ϕ が A を満足する」の略である. 同様に $M' \models_\phi A$ は,「M' において ϕ が A を満足する」の略である.
2. $\neg\mathcal{A}$ は,「$\mathcal{A}$ が真ではない」の略である.
3. $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ は,「$\mathcal{A}$ が真であるか $\mathcal{B}$ が真ではない」の略である.

4. $(\forall\phi_v{\in}\Phi_D)\mathcal{A}$ は，「ϕ とたかだか変数 v の代入の所だけが異なるすべての代入関数 $\phi_v \in \Phi_D$ に対して $\mathcal{A}$ が真である」の略である．

ϕ を D 上の代入関数，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ を taf ϕ を持つ wdr とすれば，$\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\equiv\mathcal{B}$, はそれぞれ $\neg(\mathcal{A}\supset\neg\mathcal{B})$, $(\neg\mathcal{A})\supset\mathcal{B}$, $(\mathcal{A}\supset\mathcal{B})\wedge(\mathcal{B}\supset\mathcal{A})$ の略であり，$\mathcal{A}$ を taf ϕ_v を持つ wdr とすれば，$(\exists\phi_v{\in}\Phi_D)\mathcal{A}$ は $\neg((\forall\phi_v{\in}\Phi_D)\neg\mathcal{A})$ の略である．

例 1 *(wdr)*

P を 1 引数の述語定数とし，ϕ をドメイン D 上の代入関数とする．解釈 M と M' を D 上の解釈とし，述語定数の組 (P) に関して比較可能であるとする．M' における P の解釈，すなわち，P を満たす D の要素の集合が，M における P の解釈よりも包含関係において小さいという wdr は以下のようにあらわされる．

$(\forall\phi_x{\in}\Phi_D)((M'\models_{\phi_x}P(x))\supset(M\models_{\phi_x}P(x)))\wedge\neg(\forall\phi_x{\in}\Phi_D)((M\models_{\phi_x}P(x))\supset(M'\models_{\phi_x}P(x)))$. □

3.3 wdr から M の原子 wdr への変換

ここでは，wdr から原子 wdr への変換について述べる．

述語変数と述語定数は同じ個数の引き数をもてば**似ている**という．述語変数の組と述語定数の組が似ているとは，それぞれの組の対応する位置の述語変数と述語定数が似ていることをいう．述語定数の組を $\mathbf{P}$ としたとき，その組の中にある述語定数を持つ wff を $A(\mathbf{P})$ と書く．また，$\mathbf{P}$ と $\mathbf{p}$ が似ているとしたとき，$A(\mathbf{P})$ の中の述語定数をおのおの $\mathbf{p}$ の中の対応する述語変数と置き換えたものを $A(\mathbf{p})$ と書く．

解釈 M と M' をドメイン D 上の解釈とし，述語定数の組 $\mathbf{P}$ に関して比較可能であるとする．taf ϕ を持つ M' と M に関する wdr を $\mathcal{R}(M',M)_\phi$ とし，$\mathbf{P}$ と述語変数の組 $\mathbf{p}$ が似ているとし，$\mathbf{p}$ の中の述語変数はこの wdr には含まれていないとする．この wdr から $\mathbf{P}$ に関する M の原子 wdr への変換を以下のように定義する．

1. wdr が $M\models_\phi A$ の形のとき: それ自身が M の原子 wdr となっている．
2. wdr が $M'\models_\phi A(\mathbf{P})$ の形のとき: $M\models_\phi A(\mathbf{p})$ に変換する．
3. wdr が $\neg\mathcal{A}(M',M)_\phi$ の形のとき: $M\models_\phi\neg A(\mathbf{p})$ に変換する．ただし，wdr $\mathcal{A}(M',M)_\phi$ は $M\models_\phi A(\mathbf{p})$ に変換されるとする．
4. wdr が $\mathcal{A}(M',M)_\phi\supset\mathcal{B}(M',M)_\phi$ の形のとき: $M\models_\phi A(\mathbf{p})\supset B(\mathbf{p})$ に変換する．ただし，wdr $\mathcal{A}(M',M)_\phi$ は $M\models_\phi A(\mathbf{p})$ に変換され，wdr $\mathcal{B}(M',M)_\phi$ は $M\models_\phi B(\mathbf{p})$ に変換されるとする．
5. wdr が $(\forall\phi_v{\in}\Phi_D)\mathcal{A}(M',M)_{\phi_v}$ の形のとき: $M\models_\phi\forall vA(\mathbf{p})$ に変換する．ただし，wdr $\mathcal{A}(M',M)_{\phi_v}$ は $M\models_{\phi_v}A(\mathbf{p})$ に変換されるとする．

例 2 *(wdr から M の原子 wdr への変換)*

解釈 M と M' をドメイン D 上の解釈とし，述語定数の組 (P) に関して比較可能であるとする．(P) と (p) が似ているとし，ϕ を代入関数とする．例 1の wdr から (P) に関する M の原子 wdr への変換過程の例を以下に示す．

$(\forall\phi_x{\in}\Phi_D)((M'\models_{\phi_x}P(x))\supset(M\models_{\phi_x}P(x)))\wedge\neg(\forall\phi_x{\in}\Phi_D)((M\models_{\phi_x}P(x))\supset(M'\models_{\phi_x}P(x)))$

$\Longrightarrow(\forall\phi_x{\in}\Phi_D)((M\models_{\phi_x}p(x))\supset(M\models_{\phi_x}P(x)))\wedge\neg(\forall\phi_x{\in}\Phi_D)((M\models_{\phi_x}P(x))\supset(M\models_{\phi_x}p(x)))$

$\Longrightarrow(\forall\phi_x{\in}\Phi_D)(M\models_{\phi_x}(p(x)\supset P(x)))\wedge\neg(\forall\phi_x{\in}\Phi_D)(M\models_{\phi_x}(P(x)\supset p(x)))$

$\Longrightarrow (M \models_\phi \forall x(p(x) \supset P(x))) \wedge \neg(M \models_\phi \forall x(P(x) \supset p(x)))$

$\Longrightarrow (M \models_\phi \forall x(p(x) \supset P(x))) \wedge (M \models_\phi \neg\forall x(P(x) \supset p(x)))$

$\Longrightarrow M \models_\phi (\forall x(p(x) \supset P(x)) \wedge \neg\forall x(P(x) \supset p(x)))$ □

3.4 wdr に基づく二階述語論理式と極小モデルとの関係

ここでは、柔らかい制約を表す wdr から変換された原子 wdr と固い制約を表す論理式から作られる二階述語論理式によって、一番望ましい解の形式的定義を与える.

もし, M と M' が述語定数の組 $\mathbf{P}$ に関して比較可能であり, ϕ が次の補題 1の条件を満たしていれば、wdr が真であることと, それを $\mathbf{P}$ に関して変換した原子 wdr が真であることが同値となる.

補題 1 解釈 M と M' を述語定数の組 $\mathbf{P}$ に関して比較可能であるとし, *taf* ϕ を持つ *wdr* を $\mathcal{R}(M', M)_\phi$ とし, $\mathbf{P}$ と述語変数の組 $\mathbf{p}$ が似ているとし, $\mathbf{p}$ の中の述語変数は上の *wdr* の中に含まれていないとする. この *wdr* を $\mathbf{P}$ に関して変換して原子 *wdr* $M \models_\phi R(\mathbf{p})$ が得られたとする. もし $\mathbf{P}$ 内のすべての P_i と $\mathbf{p}$ 内のすべての p_i に対して, $\phi(p_i) = (P_i)^{M'}$ であれば, 上の *wdr* が真となるときまたそのときに限り, $M \models_\phi R(\mathbf{p})$ が真となる.

証明 (スケッチ): $\mathcal{R}(M', M)_\phi$ が $M' \models_\phi A(\mathbf{P})$ の形のとき, $M \models_\phi A(\mathbf{p})$ に変換される. $\phi(p_i) = (P_i)^{M'}$ であるから, $\mathbf{p}$ 内の p_i を M で解釈するときは, $\mathbf{P}$ 内の P_i を M' で解釈したものと同じものとして解釈されるので, $M' \models_\phi A(\mathbf{P})$ が真となるときまたそのときに限り, その変換結果 $M \models_\phi A(\mathbf{p})$ は真となる. それ以外は, $\mathcal{R}(M', M)_\phi$ のメタ論理記号の数による帰納法で証明できる. □

次の定理は, 順序付けられた解釈とそれを変換した原子 wdr から作られる二階述語論理式の関係を述べている.

定理 1 解釈 M と M' を述語定数の組 $\mathbf{P}$ に関して比較可能であるとし, *taf* ϕ を持つ *wdr* を $\mathcal{R}(M', M)_\phi$ とし, $\mathbf{P}$ と述語変数の組 $\mathbf{p}$ が似ているとし, $\mathbf{p}$ の中の述語変数 $(p_1, ..., p_n)$ は上の *wdr* の中に含まれていないとする. この *wdr* を $\mathbf{P}$ に関して変換して原子 *wdr* $M \models_\phi R(\mathbf{p})$ が得られたとする. すると, $M \models_\phi \exists p_1 ... \exists p_n R(\mathbf{p})$ が真であるときまたそのときに限り解釈 M と述語定数の組 $\mathbf{P}$ に関して比較可能である M' が存在して上の *wdr* を真とする.

証明 (スケッチ): 解釈 M と述語定数の組 $\mathbf{P}$ に関して比較可能である M' が存在して $\mathcal{R}(M', M)_\phi$ が真であると仮定する. $\mathbf{p}$ の中の変数 $(p_1, ..., p_n)$ は $\mathcal{R}(M', M)_\phi$ の中に含まれていないので $\mathcal{R}(M', M)_{\phi_{p_1 ... p_n}}$ が真であることと同値である. そこで, $\phi_{p_1 ... p_n}(p_i) = (P_i)^{M'}$ とすれば, 補題 1より $\mathcal{R}(M', M)_{\phi_{p_1 ... p_n}}$ が真のときまたそのときに限り $M \models_{\phi_{p_1 ... p_n}} R(\mathbf{p})$ が真となる. これは, 二階述語論理の $\models_\phi$ の定義により, $M \models_\phi \exists p_1 ... \exists p_n R(\mathbf{p})$ が真であることと同値である. □

さて, M は以下の条件を満たすとき, $\mathbf{P}$ に関して, 一階述語論理式 $A(\mathbf{P})$ と wdr $\mathcal{R}(M', M)_\phi$ に対する**極小モデル**と呼ぶ.

> M が $A(\mathbf{P})$ のモデルであって, M と $\mathbf{P}$ に関して比較可能である $A(\mathbf{P})$ のすべてのモデル M' とすべての代入関数 ϕ に対して $\neg\mathcal{R}(M', M)_\phi$ が真となる.

$A(\mathbf{P})$ と, wdr から変換された原子 wdr を使って作られる二階述語論理式のモデルが, wdr によって定義される解釈の順序において $A(\mathbf{P})$ を満たす極小モデルとなっていることが, 以下の系で示されている.

系 1 M が $\mathbf{P}$ に関して一階述語論理式 $A(\mathbf{P})$ と *wdr* $\mathcal{R}(M', M)_\phi$ に対する極小モデルとなるのは，上の *wdr* を $\mathbf{P}$ に関して変換した結果を原子 *wdr* $M \models_\phi R(\mathbf{p})$ としたときに，M が

$$A(\mathbf{P}) \wedge \neg\exists p_1 \ldots \exists p_n (A(\mathbf{p}) \wedge R(\mathbf{p}))$$

のモデルであるときかつそのときに限る．

証明 (スケッチ): 極小モデルの定義より，M と $\mathbf{P}$ に関して比較可能であるすべての M' に対して $(M' \models_\phi A(\mathbf{P})) \supset \neg\mathcal{R}(M', M)_\phi$ が真となる．これは，M' として $(M' \models_\phi A(\mathbf{P})) \wedge \mathcal{R}(M', M)_\phi$ を真とするものが存在しないことと同値である．さらに，$(M' \models_\phi A(\mathbf{P})) \wedge \mathcal{R}(M', M)_\phi$ は wdr であるから定理 1より M' として $(M' \models_\phi A(\mathbf{P})) \wedge \mathcal{R}(M', M)_\phi$ を真とするものが存在しないことと，$M \models_\phi \neg\exists p_1 \ldots \exists p_n (A(\mathbf{p}) \wedge R(\mathbf{p}))$ が真であることと同値である．また M が $A(\mathbf{P})$ のモデルであるから $M \models_\phi A(\mathbf{P})$ も真となる．以上をあわせると M が極小モデルであることは，

$$M \models A(\mathbf{P}) \wedge \neg\exists p_1 \ldots \exists p_n (A(\mathbf{p}) \wedge R(\mathbf{p}))$$

が真であることと同値である．□

例 3 *(極小モデルの形式的定義)*

例 1の wdr を考える．例 2の変換により wdr は以下の原子 wdr に変換される．

$$M \models_\phi (\forall x(p(x) \supset P(x)) \wedge \neg\forall x(P(x) \supset p(x))).$$

M が $A(P)$ と例 1の wdr に関して極小モデルであるのは M が以下の二階述語論理式のモデルであるときかつそのときに限る．

$$A(P) \wedge \neg\exists p(A(p) \wedge (\forall x(p(x) \supset P(x)) \wedge \neg\forall x(P(x) \supset p(x)))).$$

この式は $A(P)$ における P の極小限定の定義である．□

この系 1を用いて一番望ましい解の形式的定義を与えることができる．$A(\mathbf{P})$ を固い制約，$\mathcal{R}(M', M)_\phi$ を M' の方を好ましいとする柔らかい制約とみれば，極小モデルが固い制約を満たすモデルの中で柔らかい制約の順序において一番好ましいものとなっている．上の系 1によって，この極小モデルは固い制約と柔らかい制約を組み合わせて作られた:

$$A(\mathbf{P}) \wedge \neg\exists p_1 \ldots \exists p_n (A(\mathbf{p}) \wedge R(\mathbf{p}))$$

のモデルと一致することが分かる．したがって，この式が一番望ましい解の形式的定義を与えている．

4 柔らかい制約の表現例

表現例について述べる前に簡単のための記法を導入する．$\mathbf{P}$ を述語定数の組，$x_1, \ldots, x_n$ を自由変数とすれば，$E(\mathbf{P}, x_1, \ldots, x_n)$ は，それらの幾つかを含む論理式を表す．

$M' \leq_\phi^{E(\mathbf{P}, x_1, \ldots, x_n)} M$ は，以下の wdr の略である．

$$\forall\phi_{x_1} \in \Phi_D \ldots \forall\phi_{x_1 x_2 \ldots x_n} \in \Phi_D ((M \models_{\phi_{x_1 \ldots x_n}} E(\mathbf{P}, x_1, \ldots, x_n)) \supset (M' \models_{\phi_{x_1 \ldots x_n}} E(\mathbf{P}, x_1, \ldots, x_n))).$$

また，$M' =_\phi^{E(\mathbf{P}, x_1, \ldots, x_n)} M$ は，以下の wdr の略である．

$$(M' \leq_\phi^{E(\mathbf{P}, x_1, \ldots, x_n)} M) \wedge (M \leq_\phi^{E(\mathbf{P}, x_1, \ldots, x_n)} M')$$

$E(\mathbf{P}, x_1, \ldots, x_n) \leq E(\mathbf{Q}, x_1, \ldots, x_n)$ は，以下の論理式の略である．

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n (E(\mathbf{Q}, x_1, \ldots, x_n) \supset E(\mathbf{P}, x_1, \ldots, x_n))$$

また，$E(\mathbf{P}, x_1, \ldots, x_n) = E(\mathbf{Q}, x_1, \ldots, x_n)$ は，以下の論理式の略である．

$$(E(\mathbf{P}, x_1, \ldots, x_n) \leq E(\mathbf{Q}, x_1, \ldots, x_n)) \wedge (E(\mathbf{Q}, x_1, \ldots, x_n) \leq E(\mathbf{P}, x_1, \ldots, x_n)).$$

4.1 柔らかい制約の間に優先度がない場合

できるだけ成り立って欲しい条件が以下の論理式: $E_1(\mathbf{P}, x_1, \ldots, x_n), \ldots, E_m(\mathbf{P}, x_1, \ldots, x_n)$ とすれば，柔らかい制約は以下のようになる．

$$\mathcal{R}(M',M)_\phi \stackrel{\text{def}}{=} (M' \leq_\phi M) \wedge \neg(M \leq_\phi M').$$

ここで，$M' \leq_\phi M$ とは，以下の略である．

$$\bigwedge_{i=1}^{m}(M' \leq_\phi^{E_i(\mathbf{P},x_1,\ldots,x_n)} M).$$

この関係の直観的な意味は，できるだけ $E_1,\ldots,E_m$ を満たすものを含む解釈が好ましいというものである．固い制約 $A(\mathbf{P})$ を満たし，上の順序関係で一番好ましい解の二階述語論理式による形式的定義は以下のようになる．

$A(\mathbf{P}) \wedge \neg\exists\mathbf{p}(A(\mathbf{p})\wedge$

$\bigwedge_{i=1}^{m}(E_i(\mathbf{p},x_1,\ldots,x_n) \leq E_i(\mathbf{P},x_1,\ldots,x_n)) \wedge \neg\bigwedge_{i=1}^{m}(E_i(\mathbf{P},x_1,\ldots,x_n) \leq E_i(\mathbf{p},x_1,\ldots,x_n)))$

たとえば，ルール $P(x) \supset Q(x)$ をできるだけ満たしてほしいとすれば，

$A((P,Q)) \wedge \neg\exists p\exists q(A((p,q))\wedge$

$\forall x((P(x) \supset Q(x)) \supset (p(x) \supset q(x)))\wedge \neg\forall x((p(x) \supset q(x)) \supset (P(x) \supset Q(x))))$

とすればよい．

4.2 柔らかい制約の間に優先度がある場合

いちばん成り立ってほしい論理式を $E_1^1(\mathbf{P},x_1,\ldots,x_n),\ldots,E_{m_1}^1(\mathbf{P},x_1,\ldots,x_n)$，
次に成り立ってほしい論理式を $E_1^2(\mathbf{P},x_1,\ldots,x_n),\ldots,E_{m_2}^2(\mathbf{P},x_1,\ldots,x_n),\ldots$
k 番目に成り立ってほしい論理式を $E_1^k(\mathbf{P},x_1,\ldots,x_n),\ldots,E_{m_k}^k(\mathbf{P},x_1,\ldots,x_n)$ とすれば，柔らかい制約は以下のようになる．

$$\mathcal{R}(M',M)_\phi \stackrel{\text{def}}{=} (M' \leq_\phi M) \wedge \neg(M \leq_\phi M').$$

ここで，$M' \leq_\phi M$ とは $(M' \leq_\phi^1 M) \wedge \ldots \wedge (M' \leq_\phi^k M)$ の略であり，$M' \leq_\phi^i M$ とは以下の略である．

$$(\bigwedge_{j=1}^{i-1}\bigwedge_{l=1}^{m_j}(M' =_\phi^{E_l^j(\mathbf{P},x_1,\ldots,x_n)} M)) \supset (\bigwedge_{l=1}^{m_i}(M' \leq_\phi^{E_l^i(\mathbf{P},x_1,\ldots,x_n)} M))$$

ただし，$M' \leq_\phi^1 M$ は条件部を除いた式となる．

この関係は，まず $E_1^1,\ldots,E_{m_1}^1$ をできるだけ満たすものを含む解釈が好ましく，もし，それが同じであったら，$E_1^2,\ldots,E_{m_1}^2$ をできるだけ満たすものを含む解釈が好ましく，… もし，$E_1^1,\ldots,E_{m_1}^1,\ldots,E_1^{k-1},\ldots,E_{m_{k-1}}^{k-1}$ を満たすものが同じであれば，$E_1^k,\ldots,E_{m_k}^k$ をできるだけ満たすものを含む解釈が好ましいということを表している．固い制約 $A(\mathbf{P})$ を満たし，上の順序関係で一番好ましい解の二階述語論理式による形式的定義は以下のようになる．

$$A(\mathbf{P}) \wedge \neg\exists\mathbf{p}(A(\mathbf{p}) \wedge (\mathbf{p} \leq \mathbf{P}) \wedge \neg(\mathbf{P} \leq \mathbf{p}))$$

ここで $\mathbf{p} \leq \mathbf{P}$ は $(\mathbf{p} \leq^1 \mathbf{P}) \wedge \ldots \wedge (\mathbf{p} \leq^k \mathbf{P})$ の略であり，$\mathbf{p} \leq^i \mathbf{P}$ は以下の論理式の略である．

$(\bigwedge_{j=1}^{i-1}\bigwedge_{l=1}^{m_j}(E_l^j(\mathbf{p},x_1,\ldots,x_n) = E_l^j(\mathbf{P},x_1,\ldots,x_n))) \supset (\bigwedge_{l=1}^{m_i}(E_l^i(\mathbf{p},x_1,\ldots,x_n) \leq E_l^i(\mathbf{P},x_1,\ldots,x_n)))$

さきほど述べた会議スケジュールの例はこの場合に属するのでつぎで詳述する．

4.3 会議スケジュールの例

会議スケジュールの例に関して柔らかい制約の部分を wdr で表現する．$C(x)$ を x 日に会議がスケジュールされたことを表すとし，$P(x), V(x), M(x)$ をそれぞれ x 日に社長，副社長，専務が会議に出席することを表すとする．$\mathbf{P}$ は $\{C,P,V,M\}$ とする．固い制約は，都合の悪い日を書くこととする．すなわち，$\neg C(x)$，$\neg P(x)$，$\neg V(x)$，$\neg M(x)$ が固い制約として表現されているとする．社長が会議にでなければならないという固い制約は，

$$\forall x(C(x) \supset P(x))$$

と表される．また，副社長が会議にできるだけ出るというのは，

$$E_1^1(\mathbf{P},x) = C(x) \supset V(x)$$

ができるだけ満たされているべきであるということに対応し，専務が会議にできるだけ出るというのは，

$$E_1^2(\mathbf{P}, x) = C(x) \supset M(x)$$

ができるだけ満たされているべきであるということに対応し，副社長の都合が優先されるということは $E_1^1(\mathbf{P}, x)$ が $E_1^2(\mathbf{P}, x)$ よりも優先的に成り立つことに対応する．すると，柔らかい制約の表現は以下のようになる．

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}(M', M)_\phi \stackrel{\mathrm{def}}{=} \\ &\quad (M' \leq_\phi^{E_1^1(\mathbf{P},x)} M) \wedge ((M' =_\phi^{E_1^1(\mathbf{P},x)} M) \supset (M' \leq_\phi^{E_1^2(\mathbf{P},x)} M)) \wedge \\ &\quad \neg((M \leq_\phi^{E_1^1(\mathbf{P},x)} M') \wedge ((M =_\phi^{E_1^1(\mathbf{P},x)} M') \supset (M \leq_\phi^{E_1^2(\mathbf{P},x)} M'))).\end{aligned}$$

この定義は直観的にいうと，$C(x) \supset V(x)$ をできるだけ満たすものを含む解釈を選び，もし，複数の解釈において $C(x) \supset V(x)$ を満たすものが同じ場合には，その中から $C(x) \supset M(x)$ をできるだけ満たすものを含む解釈を選ぶことを表している．これによって，まず副社長の都合が優先されて，もし専務も一緒に出席できる日があれば，そちらの方が選ばれるようになる．固い制約 $A((C, P, V, M))$ を満たし，上の順序関係で一番好ましい解の二階述語論理式による形式的定義は以下のようになる．

$$\begin{aligned}&A((C, P, V, M)) \wedge \neg\exists c \exists p \exists v \exists m (A((c, p, v, m)) \wedge \\ &\qquad ((c, p, v, m) \leq (C, P, V, M)) \wedge \neg((C, P, V, M) \leq (c, p, v, m))).\end{aligned}$$

ここで，$(c, p, v, m) \leq (C, P, V, M)$ は，以下の略である．

$$\begin{aligned}&\forall x((C(x) \supset V(x)) \supset (c(x) \supset v(x))) \wedge \\ &(\forall x((C(x) \supset V(x)) \equiv (c(x) \supset v(x))) \supset \forall x((C(x) \supset M(x)) \supset (c(x) \supset m(x)))).\end{aligned}$$

4.4　解の一部の値の比較によって解の順序が決まる場合

wdr を使えば解のある部分の値をできるだけ大きくするような場合にも解釈の順序をつけることができる．たとえば，$Q(x)$ を満たす x のうちできるだけ大きいものを求める場合の柔らかい制約は以下のようになる[2]．

$$\mathcal{R}(M', M)_\phi \stackrel{\mathrm{def}}{=} \forall \phi_x \in \Phi_D \forall \phi_{xy} \in \Phi_D(((M' \models Q(x)) \wedge (M \models Q(y))) \supset (M' \models x > y)).$$

この順序は，Q を満たすものがあったときに，大きい方を持つ解釈の方が優先されるということを表している．固い制約 $A(Q)$ を満たし，上の順序関係で一番好ましい解の二階述語論理式による形式的定義は以下のようになる．

$$A(Q) \wedge \neg\exists q(A(q) \wedge \forall x \forall y((q(x) \wedge Q(y)) \supset x > y)).$$

5　モデル論に基づく望ましい解の計算方法

望ましい解を計算する方法には，証明論的に計算する方法とモデル論的に計算する方法の 2 つがある．

証明論的に計算する方法は，望ましい解の形式的定義である二階述語論理式から二階述語論理の推論規則を用いてすべての望ましい解に共通に成り立つ論理式を導くものである[3]．

モデル論的に計算する方法は，解釈の順序にしたがって極小モデルを求めるものである．本論文では，こちらの方法について述べる．この計算方法はすべての望ましい解を求めるもので 2 段階で計算する．第 1 段階では，固い制約を満たすモデルをすべて見つけ，第 2 段階では，柔らかい制約で定義された順序にしたがって各モデルが極小モデルかどうかを調べる．

この操作は命題論理では以下のようになる．固い制約を $A(\mathbf{P})$ とし，命題定数の組 $\mathbf{P}$ に関して比較可能なモデル M', M に対して柔らかい制約 $\mathcal{R}(M', M)_\phi$ が定義されたとする．

---

[2]ただし，$Q(x)$ を満たす x は唯一であるという固い制約が必要である．

[3]ただし，二階述語論理ではどんな推論規則を用いてもすべての極小モデルで真となる論理式をすべて導くことができない場合がある．

1. 各命題に真偽値を割り当てることで一つの解釈ができる．おのおのの解釈が $A(\mathbf{P})$ を満たすかどうかを調べ，満たせば $A(\mathbf{P})$ のモデルとして登録しておく．こうして得られたモデルの集合を $\mathcal{M}$ とする．
2. すべての $M \in \mathcal{M}$ に対してある $M' \in \mathcal{M}$ が存在して $\mathcal{R}(M', M)_\phi$ となっているかどうかを調べる．もし，存在しないならば，M を極小モデルとして登録する．

命題論理であれば，モデルの数は有限であるから第1段階，第2段階ともに終了する．一階述語論理であれば，一般の場合にはモデルの数が有限とはならないので計算ができないが，変数の動く範囲が数えあげられていれば，全称限量化された文（または，wdr）は，全称限量化されている変数に取り得る値をすべて代入した式を論理積で結合したものと同値になり，存在限量化された文（または，wdr）は，存在限量化されている変数に取り得る値をすべて代入した式を論理和で結合したものと同値になるので，そのようにして変数を含まない式に変換したあと，そこで出てくる各原子論理式を一つの命題と考えて命題論理と同じように計算すればよい．

会議スケジュールの例を使って説明する．たとえば，会議日を1,2,3日のどれかとすれば，以下のような固い制約が存在することになる．これは，変数の動く領域を定義している．

$$\forall x((x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3)).$$

1,2,3は異なるので以下の固い制約も存在する．

$$1 \neq 2 \wedge 2 \neq 3 \wedge 3 \neq 1.$$

このようにすると，考えるべき原子式は

$$C(1), C(2), C(3), P(1), P(2), P(3), V(1), V(2), V(3), M(1), M(2), M(3).$$

となるので，これらをおのおの命題として考えて上の手続きを実行すれば良い．以下では，上の原子式をそれぞれ $C_1, C_2, C_3, P_1, P_2, P_3, V_1, V_2, V_3, M_1, M_2, M_3$ と表す．すると，論理的解釈はこれらの原子式の真偽値を定めればよいことになる．解釈の表現として以下では，その解釈において上のおのおのの原子式が真か偽かで表すことにする．たとえば，C_2, P_2, V_2 が真でそれ以外が偽である解釈は，

$$\{\neg C_1, C_2, \neg C_3, \neg P_1, P_2, \neg P_3, \neg V_1, V_2, \neg V_3, \neg M_1, \neg M_2, \neg M_3\}$$

と表す．
固い制約としてほかに以下のものがあるとする．

1. 会議は必ず開かれる：
   $\exists x(C(x))$.
   これは，上の変数の動く領域の条件により以下のものと同値となる．
   $C_1 \vee C_2 \vee C_3$.
2. 会議には社長が必ず出席する：
   $\forall x(C(x) \supset P(x))$.
   これは，以下のものと同値となる．
   $(C_1 \supset P_1) \wedge (C_2 \supset P_2) \wedge (C_3 \supset P_3)$.
3. $P(x)$ は x 日に社長が会議に出席することを表すのでもし，それが真ならば当然 $C(x)$ も真である：
   $\forall x(P(x) \supset C(x))$.
   これは，以下のものと同値となる．
   $(P_1 \supset C_1) \wedge (P_2 \supset C_2) \wedge (P_3 \supset C_3)$.
4. 副社長，専務の場合に関しても同様のことがいえる．その式を展開すると以下のようになる．
   $(V_1 \supset C_1) \wedge (V_2 \supset C_2) \wedge (V_3 \supset C_3)$,
   $(M_1 \supset C_1) \wedge (M_2 \supset C_2) \wedge (M_3 \supset C_3)$.

5. また, 1 日には社長が出席できず, 2 日には専務が出席できないとする.
$\neg P_1 \wedge \neg M_2$.

以上の固い制約を満たすモデルをすべて求め, 次に極小モデルを求める. これは, $\mathcal{R}(M', M)_\phi$ が成立するかどうかで調べる.
変数の動く領域が決まっているので, 前の章で定義した会議スケジュールに関する wdr の中の限量化された式はすべて 1,2,3 を代入した形に展開できる. すなわち:

$$\mathcal{R}(M', M)_\phi = (M' \preceq_\phi M) \wedge \neg(M \preceq_\phi M')$$

ここで, $M' \preceq_\phi M$ は, 以下の略である.

$$\begin{aligned}
&((M \models_\phi C_1 \supset V_1) \supset (M' \models_\phi C_1 \supset V_1)) \wedge \\
&((M \models_\phi C_2 \supset V_2) \supset (M' \models_\phi C_2 \supset V_2)) \wedge \\
&((M \models_\phi C_3 \supset V_3) \supset (M' \models_\phi C_3 \supset V_3)) \wedge \\
&((((M \models_\phi C_1 \supset V_1) \equiv (M' \models_\phi C_1 \supset V_1)) \wedge \\
&\quad ((M \models_\phi C_2 \supset V_2) \equiv (M' \models_\phi C_2 \supset V_2)) \wedge \\
&\quad ((M \models_\phi C_3 \supset V_3) \equiv (M' \models_\phi C_3 \supset V_3))) \supset \\
&\quad (((M \models_\phi C_1 \supset M_1) \supset (M' \models_\phi C_1 \supset M_1)) \wedge \\
&\quad ((M \models_\phi C_2 \supset M_2) \supset (M' \models_\phi C_2 \supset M_2)) \wedge \\
&\quad ((M \models_\phi C_3 \supset M_3) \supset (M' \models_\phi C_3 \supset M_3))))
\end{aligned}$$

この wdr を用いてモデルの比較をすればよい. 例えば, 以下の 2 つの解釈は、上の固い制約を満たすモデルである.

$$I_1 = \{\neg C_1, \neg C_2, C_3, \neg P_1, \neg P_2, P_3, \neg V_1, \neg V_2, V_3, \neg M_1, \neg M_2, M_3\}.$$
$$I_2 = \{\neg C_1, C_2, \neg C_3, \neg P_1, P_2, \neg P_3, \neg V_1, V_2, \neg V_3, \neg M_1, \neg M_2, \neg M_3\}.$$

I_1 では, 3 日に会議があり, 3 人とも出席する. I_2 では, 2 日に会議があり, 社長, 副社長だけが出席する. この二つのモデルのうち, 柔らかい制約の条件から I_1 の方が好ましい. 実際 $\mathcal{R}(I_1, I_2)_\phi$ が成り立つのでモデルの順序関係が意図した解の順序と一致している. また, この関係から I_2 は極小モデルではないことがわかる. このようにして, すべてのモデルに対してそれより好ましいモデルがあるか調べ, もしそれより好ましいモデルがなければ極小モデルということになる. この例では, さきほどの I_1 だけが極小モデルということがわかる.

この結論は, 固い制約の追加によって非単調的に変化する. 例えば, 3 日には副社長が別の都合で出席できなくなったとする. つまり以下の制約が加わったことになる:

$$\neg V_3.$$

すると、I_1 はもはやモデルにならないので別な極小モデルを探すことになる. すると、この場合の極小モデルはさきほどの I_2 になる. この場合, 次の解釈もモデルであるが極小モデルではない.

$$I_3 = \{\neg C_1, \neg C_2, C_3, \neg P_1, \neg P_2, P_3, \neg V_1, \neg V_2, \neg V_3, \neg M_1, \neg M_2, M_3\}.$$

I_2 と I_3 を比較してみると, I_2 では社長と副社長が出席し, I_3 では社長と専務が出席する. 柔らかい制約の間の優先順位により副社長の都合が優先されて, I_2 が選ばれる. このため, 前の固い制約では 3 日が会議日だったが新しい制約が入ったことで 2 日に会議日が変更になって結論が非単調的に変化したのである.

最後に, wdr が半順序関係であるときの若干の計算の効率化について述べる. $\mathcal{R}(M', M)_\phi$ は Φ_D におけるすべての代入関数 ϕ に対して以下の条件を満たすとき, **P** に関する (**厳密**) **半順序関係**と呼ぶ.

1. すべての M に対して $\mathcal{R}(M, M)_\phi$ が真ではない.
2. すべての M、M と **P** に関して比較可能である M', M'' に対してもし, $\mathcal{R}(M'', M')_\phi$ かつ $\mathcal{R}(M', M)_\phi$ が真ならば, $\mathcal{R}(M'', M)_\phi$ が真である.

このときには，以下の方法で極小モデルを求めることができる．

1. 問い制約 $A(\mathbf{P})$ のモデルの集合を $\mathcal{M}$ とする．
2. $\mathcal{MML}$(極小モデルリスト) を作り，最初は空にしておく．
3. まだ調べていない $M \in \mathcal{M}$ をとる．
   (a) $\mathcal{R}(M', M)_\phi$ なる $M' \in \mathcal{MML}$ がないときにかぎり，M を $\mathcal{MML}$ に加える．
   (b) $\mathcal{R}(M, M')_\phi$ なる $M' \in \mathcal{MML}$ があれば，すべて $\mathcal{MML}$ から取り除く．
4. もし，$\mathcal{M}$ のすべてのモデルを調べ終わっていれば $\mathcal{MML}$ をすべての極小モデルとして出力する．調べ終わっていなければ，ステップ 3 を繰り返す．

上の手続では，一つのモデルを比較するときにいったん取り除いたモデルとの比較を必要としない．なぜなら半順序が遷移律を満たすので，いったん取り除いたモデルより大きいモデルが極小かどうかを調べるときには，必ず極小モデルリストの中にそのモデルよりも小さいものが存在してそのモデルが極小でないことがわかるからである．

6 関連する研究

この章では，関連する研究として優先順位つき極小限定，Preference Logic，HCLP との比較を行う．

1．極小限定:

極小限定の発展形である優先順位つき極小限定 (Prioritized Circumscription)[6] の技法を使えば，柔らかい制約の中でできるだけ成り立ってほしい条件に優先度のある場合までは表現可能である．ただし，その場合成り立ってほしい論理式の否定を極小化する必要がある．しかし，本論文で述べたようなできるだけある値を大きくしたいというような解の選択基準をどう表現するかは明らかでない．

また，応用面から考えると今までの極小限定の目的は，情報が不完全な場合にそれを補うということであり，本論文で述べたような解の選択条件として用いるという視点はこれまでなかったものである．

2．Preference Logic:

Shoham はモデル論を持つ一階述語論理や様相論理などの一般の論理に対して解釈の順序を導入し，その順序における極小モデルを扱う Preference Logic[7] を提案している．Preference Logic は，扱う論理や導入する順序をかえることによって非単調推論のいろいろな定式化を統一的に表現できるが，非単調推論をモデル論的に定義したものであり，証明論的な定義を持っていない．

これに対し，本論文の枠組は一階述語論理における解釈の順序を導入しているので一階述語論理における Preference Logic の具体化になっているだけでなく，解釈の順序における極小モデルの形式的定義を二階述語論理で与えているので，(二階述語論理の) 証明論を持っている．

また，彼は非単調推論をデフォルト推論の一種とみなしており，確率的情報がデフォルト規則を決める上で重要な役割を持っていると主張している．[7, Section 4]．つまり，彼は非単調推論を確率的な情報を反映した推論とみなしている．これに対して本論文では，非単調推論の枠組を人間の好みを反映させるために用いているので彼の視点とは異なっている．

3．HCLP:

制約論理プログラミング HCLP(Hierarchical Constraint Logic Programming) [8] は，制約論理型プログラミングにはじめて制約階層を導入したものである．そこでは，ホーン節中のボディの部分に必ず満たさなければいけない制約だけでなく，優先度を持った制約も表現できるようになっている．しかし，一般の論理式の制約階層の表現ができないことや，解の導出経路が異なる場合には解どうしの比較ができないことのような問題点がある．これに対して本論文の定式化は，モデル論に基づいたものであるのでより宣言的な制約の表現が可能になっている．

7 おわりに

この定式化の意義は以下の 2 点である.

1. より表現能力のある制約問題表現の提案:

必ず成り立たなければならない制約だけでなく, 解の選定条件を与える柔らかい制約の論理的表現を提案した. これは, 合成型問題に対する新しい知識表現の提案と見ることもできる. また, いろいろな柔らかい制約の性質に応じた具体的表現を与えた.

2. 非単調推論の新しい応用:

元来の非単調推論の目的は, 不完全な知識を補うためのヒューリスティックスを定式化したものと見ることができる. 本論文で述べた定式化は, 同じ技法を使っているが複数解の選択基準の表現を目的としている. つまり, 非単調推論の新しい応用を与えたものと考えられる.

将来の研究方向として以下のようなものがあると考えられる.

1. 高速化:

本論文で示したモデル論に基づく証明法は, 第 1 段階としてモデルをすべて求めなければならず. これがこの方法における最大の速度ネックになっている. もし, 求めることがすべての極小モデルではなく, ある論理式がすべての極小モデルで真であるかどうかを調べるだけであれば, その論理式に関係する部分だけを調べればよい. これを実現する方法として ATMS [9] の手法が使える可能性がある.

2. 一階述語論理への拡張:

モデル論に基づく証明法では, モデルが有限である必要があるが一階述語論理では, 一般にモデルは有限ではない. また, モデルの順序関係を二階述語論理式に変換して, 二階述語論理の推論規則を用いても完全とはならない場合がある. しかし, モデルが有限でなくても完全であるクラスがありうるので, 完全かつ表現能力のあるクラスを探す研究が重要であると思われる. 柔らかい制約のうちある論理式を優先的に成り立たせるような制約の場合には, 優先順位つき極小限定として表現できるのでその証明法として最近注目されている層状プログラムの意味論との関係 [10] が重要であると思われる.

3. 推論過程における好み:

推論を速くするための制御として例えば条件のきついところをまず決める等の知識も専門家は持っている. これは, 解の選択条件とは異なる推論制御の好みだが実用的なシステムを得るためには必要な知識である. これは推論の過程を対象とするような別な知識表現が必要である.

4. 知識が不完全な場合の取り扱い:

知識が不完全な場合の計画はロボットの目標達成のための計画の問題等に多く見られる. こうした場合には, 本来の非単調推論の目的である不足知識の補足と柔らかい制約による計画の選択を組み合わせる必要がある.

謝辞

本研究にいろいろな示唆を与えて下さった ICOT の古川次長, 長谷川第 1 研究室長, 相場, Hawley, 井上, 石川, 有馬, 橋田, 向井氏ならびに東芝の永井氏, 沖電気の高山氏に感謝致します.

参考文献

[1] 上野晴樹: エキスパート・システム概論, 情報処理, Vol. 28, No. 2, pp1.147–157 (1987).

[2] Fox, M. S., Allen, B. P., Smith, S. F. and Strohm, G. A.: *ISIS: A Constraint-Directed Reasoning Approach to Job Shop Scheduling*, CMU-RI-TR-83-8, Carnegie-Mellon University (1983).

[3] Smith, S. F., Fox, M. S. and Ow, P. S.: *Constructing and Maintaining Detailed Production Plans: Investigations into the Development of Knowledge-Based Factory Scheduling Systems*, *AI Magazine*, Vol. 7, pp.45–61 (Fall 1986).

[4] Descotte, Y. and Latombe, J.: *Making Compromises among Antagonist Constraints in a Planner*, *Artif. Intell.*, Vol. 27, pp.183–217 (1985).

[5] McCarthy, J.: *Circumscription - a Form of Non-monotonic Reasoning*, *Artif. Intell.*, Vol. 13, p.27–39 (1980).

[6] McCarthy, J.: *Applications of Circumscription to Formalizing Commonsense Knowledge*, *Artif. Intell.*, Vol. 28, pp.89–116 (1986).

[7] Shoham, Y.: *Nonmonotonic Logics: Meaning and Utility*, *Proc. of IJCAI87*, pp.388–393 (1987).

[8] Borning, A., Maher, M., Martindale, A. and Wilson, M.: *Constraint Hierarchies and Logic Programming*, *Proc. of ICLP89*, pp.149–164 (1989)

[9] de Kleer, J.: *An assumption-based TMS*, *Artif. Intell.*, Vol. 28, pp.127 162 (1986).

[10] Lifschitz, V.: *On the Declarative Semantics of Logic Programs with Negation*, *Foundations of Deductive Databases and Logic Programming*, Morgan Kaufmann, pp.177–192 (1987).